



## **Annales concours**

## **ICNA 2019**

CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT  
D'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE



**ÉPREUVE OBLIGATOIRE DE  
MATHÉMATIQUES**

Durée : 4 heures

Coefficient : 2



Cette épreuve comporte :

- 1 page de garde recto
- 2 pages de consignes recto-verso
- 10 pages de texte recto-verso

**TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT  
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)**

## ÉPREUVE OBLIGATOIRE A OPTION DE MATHÉMATIQUES

## A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve obligatoire à option de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé informatiquement.

- 1) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un stylo à encre foncée : bleue ou noire et à bille ou feutre. Vous devez **cocher ou noircir** complètement la case en vue de la lecture informatisée de votre QCM.
- 2) Utilisez le sujet comme brouillon (ou les feuilles de brouillons qui vous sont fournies à la demande par la surveillante qui s'occupe de votre rangée) et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.
- 3) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté informatiquement et de ne pas être corrigé.
- 4) Si vous voulez corriger votre réponse, **n'utilisez pas de correcteur** mais indiquez la nouvelle réponse sur la ligne de repentir.
- 5) Cette épreuve comporte 40 questions obligatoires, **certaines, de numéros consécutifs, peuvent être liées. La liste de ces questions est donnée sur la page d'avertissements.**

**Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.**

- 6) A chaque question numérotée entre 1 et 40, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 41 à 80 seront neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.

Pour chaque ligne numérotée de 1 à 40, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

- ▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question, *la ligne correspondante doit rester vierge.*
- ▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse : *vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.*
- ▶ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes : *vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et deux seulement.*
- ▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne : *vous devez alors noircir la case E.*

**Attention, toute réponse fausse peut entraîner pour la question correspondante une pénalité dans la note.**

7) EXEMPLES DE RÉPONSES :

Question 1 :  $1^2 + 2^2$  vaut :

- A) 3                  B) 5                  C) 4                  D) -1

Question 2 : le produit  $(-1) (-3)$  vaut :

- A) -3                  B) -1                  C) 4                  D) 0

Question 3 : Une racine de l'équation  $x^2 - 1 = 0$  est :

- A) 1                  B) 0                  C) -1                  D) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :

	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
1 -	A	B	C	D	E
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
2 -	A	B	C	D	E
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3 -	A	B	C	D	E
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## PARTIE 1 : Marches Aléatoires.

### Marche aléatoire sur une droite graduée

Un piéton se promène sur un axe gradué régulièrement. A chaque seconde, il fait un déplacement soit vers la gauche avec une probabilité  $a$ , soit vers la droite avec une probabilité  $b = 1 - a$ , chaque déplacement correspond à une graduation. **Le piéton part toujours à l'instant 0 de l'origine  $O$  du repère.** On note  $n$  le nombre de déplacements du piéton et  $N(x)$  le point d'abscisse entière  $x$ .

**Question 1 :** Dans cette question  $a = 1/3$ . On peut dire que :

- A) La probabilité que le piéton arrive en 4 déplacements au point  $N(2)$  est :  $2/81$
- B) La probabilité que le piéton arrive en 4 déplacements au point  $N(2)$  est :  $32/81$
- C) La probabilité que le piéton arrive en 4 déplacements au point  $N(2)$  est :  $8/12$
- D) La probabilité que le piéton arrive en 4 déplacements au point  $N(2)$  est :  $1/2$

**Question 2 :** Dans cette question  $a = 1/2$ . On peut dire que :

- A) La probabilité que le piéton arrive en 4 déplacements au point  $N(-2)$  est :  $1/6$
- B) La probabilité que le piéton arrive en 4 déplacements au point  $N(-4)$  est :  $1/2$
- C) La probabilité que le piéton arrive en 4 déplacements au point  $N(-1)$  est :  $0$
- D) La probabilité que le piéton arrive en 4 déplacements au point  $N(2)$  est :  $1/6$

**Question 3 :** Dans cette question  $a = 1/2$ . On peut dire que :

- A) La probabilité que le piéton se retrouve au point  $N(0)$  après  $2n + 1$  déplacements est :  $0$
- B) La probabilité que le piéton se retrouve au point  $N(0)$  après  $n$  déplacements est :  $1/2^n$
- C) La probabilité que le piéton se retrouve au point  $N(0)$  après  $2n$  déplacements est :  $1/2^{2n}$
- D) La probabilité que le piéton se retrouve au point  $N(0)$  après  $2n$  déplacements est :  $\binom{2n}{n} 2^{-n}$

**Question 4 :** Dans le cas général, on peut affirmer que :

- A) La probabilité que le piéton se trouve au point  $N(-4)$  après  $n = 4$  déplacements est :  $a^4$
- B) La probabilité que le piéton se trouve au point  $N(p)$ , avec  $0 < p \leq 4$ , après  $n = 4$  déplacements est :  $\frac{a^{(4+p)/2} b^{(4-p)/2}}{2^4}$
- C) La probabilité que le piéton se trouve au point  $N(p)$ , avec  $0 \leq p \leq n$ , après  $n$  déplacements est :  $\frac{a^{(n+p)/2} (1-a)^{(n-p)/2}}{2^n} \binom{n}{(n+p)/2}$
- D) La probabilité que le piéton se trouve au point  $N(2p)$ , avec  $0 \leq p \leq n$ , après  $2n$  déplacements est :  $\binom{2n}{n-p} a^{n-p} (1-a)^{n+p}$

## Marche aléatoire sur un quadrillage.

Un piéton se promène sur un quadrillage muni d'un repère orthonormé d'origine  $O$  gradué régulièrement. A chaque seconde, il fait un déplacement, soit vers la droite avec une probabilité  $a$ , soit vers le haut avec une probabilité  $b = 1 - a$ , (chaque déplacement correspond à une graduation). On note  $N(x; y)$  le point de coordonnées entières  $(x, y)$ . **Le piéton part toujours à l'instant 0 de l'origine du repère.**

**Question 5 :** Dans cette question  $a = 1/3$ . On peut dire que :

- A) La probabilité que le piéton arrive au point  $N(1; 1)$  est :  $4/9$
- B) La probabilité que le piéton arrive au point  $N(2; 2)$  est :  $4/27$
- C) La probabilité que le piéton arrive au point  $N(3; 3)$  est :  $\frac{160}{(9^3)11}$
- D) La probabilité que le piéton arrive au point  $N(x; x)$  avec  $x \in \mathbb{N}^*$  est :  $\frac{2^x(2x)!}{(x!)^2 9^x}$

**Question 6 :**

Dans cette question  $a = 1/2$ . On peut affirmer que :

- A) La probabilité que le piéton arrive au point  $N(2; 3)$  est égale à la probabilité que le piéton arrive au point  $N(3; 2)$
- B) La probabilité que le piéton arrive au point  $N(2; 4)$  est 1
- C) La probabilité que le piéton arrive au point  $N(2; 4)$  est  $\binom{6}{2} 2^{-6}$
- D) La probabilité que le piéton arrive au point  $N(x; x)$  avec  $x \in \mathbb{N}^*$  est  $\frac{2^x(2x)!}{x! 2^{2x}}$

**Question 7 :** Dans le cas général  $0 < a < 1$ , la probabilité que le piéton arrive au point  $N(x; y)$  ( $x$  et  $y$  appartenant à  $\mathbb{N}^*$ ) est :

- A)  $ax/(ax + by)$
- B)  $a^x b^y$
- C)  $a^y b^x$
- D)  $(1 - a)^y a^x \binom{x + y}{y}$

**Question 8 :** La probabilité que le piéton arrive pour la première fois en un point du segment  $[P(0; 2)Q(2; 2)]$  est égale à :

- A) La somme des probabilités des événements : « le piéton arrive au point  $N(0; 2)$  », « le piéton arrive au point  $N(1; 2)$  » et « le piéton arrive au point  $N(2; 2)$  »
- B)  $\sum_{k=0}^2 b^2 a^k \binom{2+k}{k}$
- C)  $\sum_{k=1}^2 b^k a^2 \binom{2+k}{k}$
- D)  $11/16$  dans le cas où  $a = b$

**Question 9 :** La probabilité que le piéton arrive pour la première fois en un point du segment  $[P(x; 0)Q(x; x)]$  (avec  $x \in \mathbb{N}^*$ ) est :

- A)  $\sum_{k=0}^x (a(1-a))^k$
- B)  $\sum_{k=0}^x (1-a)^k a^x$
- C)  $\sum_{k=0}^{x-1} \binom{x+k-1}{k} (1-a)^k a^x$
- D)  $\sum_{k=0}^x \binom{x+k}{x} (1-a)^x a^k$

## PARTIE 2 : Fonction définie par une intégrale.

Soit la fonction  $g : x \rightarrow \int_1^x \frac{dt}{1+\ln(t)}$ , où  $\ln$  est la fonction logarithme népérien.

**Question 10 :** On peut dire que :

- A)  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$
- B)  $g$  est définie sur  $]1/e, +\infty[$
- C)  $g$  est définie sur  $]0, 1/e[$
- D) Le domaine de définition de  $g$  est  $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1/e\}$

**Question 11 :** On peut affirmer que :

- A)  $g$  est dérivable sur son domaine de définition et  $g'(x) = \frac{1}{1+\ln(x)}$
- B)  $g$  est dérivable sur son domaine de définition et  $g'(x) = \frac{1}{1+\ln(x)} - 1$
- C)  $g$  est décroissante sur  $]1/e, +\infty[$
- D)  $g'$  est négative sur  $]0, 1/e[$

**Question 12 :** On peut dire que :

- A) En tout point  $x$  où  $g$  est définie,  $g(x) = \int_0^{\ln(x)} \frac{e^u}{1+u} du$
- B)  $g''$  est négative sur  $]0, 1/e[$
- C)  $g(x) = x - 1 + \int_0^{\ln(x)} \frac{ue^u}{1+u} du$
- D)  $g''$  est négative sur  $]1/e, +\infty[$

**Tournez la page S.V.P.**

**Question 13 :** On peut dire que :

- A)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  est finie
- B)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
- C)  $\lim_{x \rightarrow (1/e)^+} |g(x)| < +\infty$
- D)  $g$  est convexe sur son domaine de définition

**Question 14 :** On peut dire que :

- A) L'intégrale  $\int_0^1 \frac{dt}{1 + \ln(t)}$  est convergente
- B) La fonction  $x \mapsto \frac{1}{1 + \ln(x)}$  est intégrable en 0
- C) L'intégrale  $\int_0^{1/(e+1)} \frac{dt}{1 + \ln(t)}$  est convergente
- D) La courbe de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1 + \ln(x)}$  prolongée par continuité en  $0^+$  admet en ce point une tangente horizontale

**Question 15 :** On peut dire que :

- A) La fonction  $x \rightarrow 1 + \ln(x + 1)$  est développable en série entière en 0 et cette série entière est convergente sur l'intervalle  $[-1, 1]$ .
- B) La fonction  $x \rightarrow 1 + \ln(x + 1)$  est développable en série entière en 0 et cette série entière est convergente sur l'intervalle  $] - 1, 1[$ .
- C) Si la fonction  $x \rightarrow g(x + 1)$  est développable en séries entière au voisinage de 0, alors son rayon de convergence  $R$  vérifie :  $R \leq 1 - 1/e$
- D) La fonction  $x \rightarrow g(x + 1)$  a pour développement limité en 0 :  $x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$

Soit la fonction  $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{1 + \ln(t)}$

**Question 16 :** On peut dire que :

- A)  $f$  n'a pas de limite en  $0^+$
- B)  $f(x)$  existe pour  $x$  appartenant à  $\mathbb{R}^{+*} - \{1/e\}$
- C)  $f(x)$  existe pour  $x$  appartenant à  $]0, +\infty[ - \{1/e\}$
- D)  $f(x)$  existe pour  $x$  appartenant à  $]0, 1/e[ \cup ]1/\sqrt{e}, +\infty[$

Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par :  $h(x) = 2x \ln(x) - 2 \ln(x) + 2x - 1$ .

**Question 17 :** On peut dire que :

- A)  $h''$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}^{+*}$
- B)  $h'$  ne s'annule qu'une seule fois dans l'intervalle  $]0, +\infty[$
- C)  $h'$  s'annule au moins en deux valeurs de l'intervalle  $]0, +\infty[$
- D)  $h$  admet un extrémum dans l'intervalle  $]1, e[$

**Question 18 :** On peut dire que :

- A)  $f$  est positive sur  $]0, 1/\sqrt{e}[ \cup ]1/e, +\infty[$
- B)  $\forall (x, x') \subset ]0, 1/e[ \times ]1, +\infty[$  on a  $f(x)f(x') < 0$
- C) En tout point où  $f$  est dérivable,  $f'(x) = \frac{h(x)}{(1 + \ln(x^2))(1 + \ln(x))}$
- D)  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}^{++} \setminus [1/e, 1/\sqrt{e}]$

**Question 19 :** On rappelle que si une fonction  $\phi$  est intégrable sur un intervalle  $[a, b]$ , avec  $a$  différent de  $b$ , la valeur moyenne de  $\phi$  sur  $[a, b]$  est le réel  $\frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(x) dx$ . On peut dire que :

- A) En général si une fonction  $\phi$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}^*$ , alors la valeur moyenne de  $\phi$  sur l'intervalle  $[x^2, x]$  a pour limite 0 quand  $x$  tend vers  $0^+$
- B) Il existe une fonction  $\phi$  continue en  $0^+$ , telle que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{x^2}^x \phi(t) dt \neq 0$
- C) En général si une fonction  $\phi$  définie sur  $\mathbb{R}$  est continue en 0, alors la valeur moyenne de  $\phi$  sur l'intervalle  $[x^2, x]$  a pour limite 0 quand  $x$  tend vers  $0^+$
- D) La limite de la valeur moyenne de  $f$  sur l'intervalle  $[x^2, x]$  quand  $x \rightarrow 0^+$  est 0

**Question 20 :** On peut dire que :

- A) La fonction  $f$  est dérivable en 1
- B)  $f$  est négative sur l'intervalle  $]0, \frac{1}{e}[$
- C) La droite tangente en  $x = 1$  à la courbe représentative de  $f$  est  $y = x - 1$  et la courbe de  $f$  se situe au dessous de la tangente dans un voisinage de  $x = 1$
- D) La droite tangente en  $x = 1$  à la courbe représentative de  $f$  est  $y = x - 1$  et la courbe de  $f$  se situe au dessus de la tangente dans un voisinage de  $x = 1$

**Question 21 :** On peut dire que :

- A)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- B)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
- C)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
- D) Il existe  $a > 1$  tel que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^a} = 0$

### PARTIE 3 : Décomposition d'une matrice carrée $A$ en une somme matricielle faisant intervenir explicitement les valeurs propres et les vecteurs propres de $A$ .

Dans toute cette partie on considère une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (avec  $n \geq 2$ ) dont les valeurs propres sont supposées **réelles et distinctes** et on note  $A^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sa matrice transposée.

Si  $U$  est un vecteur colonne de  $\mathbb{R}^n$ ,  $U^T$  représente alors le vecteur ligne transposé de  $U$ . On pourra éventuellement identifier le vecteur colonne  $U$  avec la matrice unicolonne  $[U]$  et le vecteur ligne  $U^T$  avec la matrice uniligne  $[U]^T$ .

Le produit scalaire canonique dans  $\mathbb{R}^n$  sera noté  $\langle, \rangle$ .

**Question 22 :** On peut affirmer que :

- A)  $[U]^T \cdot [U]$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- B)  $[U] \cdot [U]^T$  est un scalaire
- C)  $[U]^T \cdot [U]$  est un scalaire
- D)  $[U] \cdot [U]^T$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

**Question 23 :** Soient  $M$  et  $N$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $1 \leq i \leq n$ . On désigne par  $[X_i]$  la matrice unicolonne correspondant à la colonne  $i$  de la matrice  $M$  et par  $[Y_i]^T$  la matrice uniligne correspondant à la ligne  $i$  de la matrice  $N$ .

On calcule ensuite la somme  $S = \sum_{i=1}^{i=n} [X_i] \cdot [Y_i]^T$ . On peut dire alors que :

- A)  $S$  est la trace du produit matriciel  $M \cdot N$
- B)  $S$  est le déterminant du produit matriciel  $M \cdot N$
- C)  $S$  est la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $S = M \cdot N$
- D)  $S$  est la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $S = N \cdot M$

**Question 24 :** On peut affirmer que pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :

- A)  $A$  et  $A^T$  ont le même polynôme caractéristique
- B)  $A \cdot A^T$  est une matrice symétrique
- C)  $A \cdot A^T = A^T \cdot A$
- D) Les matrices  $A$  et  $A^T$  ont les mêmes vecteurs propres

De même que l'on définit  $U$  **vecteur propre à droite** d'une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par la relation  $AU = \lambda U$  ( $\lambda$  représente une valeur propre de  $A$ ), on peut également définir un **vecteur propre à gauche** de  $A$  par la relation  $V^T A = \mu V^T$  où  $V^T$  est un vecteur propre associé à une valeur propre  $\mu$  de  $A^T$ . On remarquera que le vecteur propre à gauche est nécessairement un vecteur ligne.

**Question 25 :** On peut alors dire pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :

- A) Les matrices  $A$  et  $A^T$  ont les mêmes vecteurs propres à gauche
- B) Si  $U$  est un vecteur propre à droite de  $A$  alors  $U^T$  est vecteur propre à gauche de  $A^T$ , mais les valeurs propres associées sont différentes
- C) Les vecteurs propres à droite et à gauche de  $A$  correspondent au même ensemble de valeurs propres
- D) Le vecteur transposé d'un vecteur propre à gauche de  $A^T$  est un vecteur propre à droite de  $A$

**Question 26 :** Soit  $V^T$  un vecteur propre à gauche de la matrice  $A$  relatif à la valeur propre  $\lambda$ , et  $U$  un vecteur propre à droite de  $A$  pour une valeur propre  $\mu$  différente de  $\lambda$ .  
En calculant la quantité  $V^T \cdot A \cdot U$  et en faisant intervenir  $\mu$  et  $\lambda$ , on constate :

- A)  $V^T \cdot A \cdot U$  est la matrice nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- B)  $V^T \cdot A \cdot U > 0$
- C) Les vecteurs  $U$  et  $V$  sont orthogonaux
- D) Les vecteurs  $U$  et  $V$  sont obligatoirement colinéaires

**A partir de maintenant un vecteur propre à droite sera, comme il est habituel, appelé simplement vecteur propre.**

On rappelle que dans cet exercice les valeurs propres de  $A$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont supposées réelles et distinctes. Pour  $i = 1, \dots, n$ , on désigne par  $X_i$ , un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$  et par  $Y_i$  un vecteur propre de  $A^T$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ .

**Question 27 :** Soient  $X_i$  et  $Y_j$  des vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\lambda_i$  et  $\lambda_j$  pour tout  $i$  et  $j$  tels que  $\lambda_i$  soit différent de  $\lambda_j$ . On a alors :

- A)  $\langle X_i, Y_j \rangle = 1$
- B)  $\langle X_i, Y_j \rangle = 0$
- C)  $\langle X_i, Y_j \rangle$  est strictement positif
- D)  $\langle X_i, Y_j \rangle = 0$  si et seulement si  $X_i$  ou  $Y_j$  est nul

**Question 28 :** En remarquant que les vecteurs  $X_i$  pour  $i = 1, \dots, n$  forment une base de  $\mathbb{R}^n$ , on peut alors écrire :

$$Y_i = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n.$$

En calculant le produit scalaire  $\langle Y_i, Y_i \rangle$ , on peut alors affirmer que :

- A) Le coefficient  $\alpha_i$  et  $\langle X_i, Y_i \rangle$  sont de même signe
- B) Le coefficient  $\alpha_i$  est nul
- C)  $\alpha_i \langle X_i, Y_i \rangle$  est strictement positif
- D)  $\langle Y_i, Y_i \rangle$  est nul

**Question 29 :** Soient  $X_i$  et  $Y_i$  des vecteurs propres respectifs de  $A$  et  $A^T$  correspondant à la même valeur propre  $\lambda_i$ . On substitue au vecteur  $Y_i$  le vecteur  $Z_i = \frac{Y_i}{\langle X_i, Y_i \rangle}$ , alors :

- A)  $Z_i$  n'est plus un vecteur propre
- B)  $\langle X_i, Z_i \rangle = 0$
- C) Pour tout  $i$  différent de  $j$ ,  $\langle X_i, Z_j \rangle = 1$
- D)  $\langle X_i, Z_j \rangle = 0$  si et seulement si  $X_i$  ou  $Z_j$  est nul

On désigne par  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Z}$  les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  formées de la façon suivante :  
 Les colonnes de  $\mathcal{X}$  sont les vecteurs  $X_i$  et les lignes de  $\mathcal{Z}$  sont les vecteurs  $Z_i^T$ .  
 On notera  $[X_i]$  et  $[Z_i]^T$  les matrices respectivement unicolonnes et unilignes associées aux vecteurs précédents.

**Question 30 :** On peut alors écrire que la matrice produit  $\mathcal{X} \cdot \mathcal{Z}$  vérifie :

A)  $\mathcal{X} \cdot \mathcal{Z}$  est une matrice composée uniquement de 1

B)  $\mathcal{X} \cdot \mathcal{Z} = \sum_{i=1}^{i=n} [Z_i] \cdot [X_i]^T$

C)  $\mathcal{X} \cdot \mathcal{Z} = \sum_{i=1}^{i=n} [X_i]^T \cdot [Z_i]$

D)  $\mathcal{X} \cdot \mathcal{Z} = \sum_{i=1}^{i=n} [X_i] \cdot [Z_i]^T$

**Question 31 :** On peut alors déduire que :

A)  $\sum_{i=1}^{i=n} [Z_i] \cdot [X_i]^T = I_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

B)  $\sum_{i=1}^{i=n} [X_i]^T \cdot [Z_i] = I_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

C)  $\sum_{i=1}^{i=n} [X_i] \cdot [Z_i] = I_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

D)  $\mathcal{X} = \mathcal{Z}^{-1}$

**Question 32 :** En calculant le produit matriciel  $A \cdot \mathcal{X} \cdot \mathcal{Z}$  on obtient :

A)  $A \cdot \mathcal{X} \cdot \mathcal{Z} = I_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

B)  $A = \sum_{i=1}^{i=n} [Z_i] \cdot A \cdot [X_i]^T$

C)  $A = \sum_{i=1}^{i=n} [X_i]^T \cdot A \cdot [Z_i]$

D)  $A = \sum_{i=1}^{i=n} A \cdot [X_i] \cdot [Z_i]^T$

**Question 33 :** On peut donc en déduire que :

A)  $A = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i [Z_i]^T \cdot [X_i]$

B)  $A = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i [X_i]^T \cdot [Z_i]$

C)  $A = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i [X_i] \cdot [Z_i]^T$

D)  $A = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i [Z_i] \cdot [X_i]^T$

**Question 34 :** On considère la matrice  $M_i = [X_i] \cdot [Z_i]^T$ , on constate que :

- A)  $M_i$  est une matrice nilpotente
- B)  $M_i$  est une matrice de projecteur
- C) Tous les éléments de la diagonale de  $M_i$  sont égaux à  $\lambda_i$
- D)  $M_i$  est une matrice dont la trace est nulle

**Question 35 :** En utilisant les résultats précédents, on constate que :

- A)  $A^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i^2 [Z_i] \cdot [X_i]^T$
- B)  $A^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i^2 [X_i]^T \cdot [Z_i]$
- C)  $k$  étant un nombre entier naturel entre 1 et  $n$ ,  $A^k = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i^k [X_i] \cdot [Z_i]^T$
- D)  $k$  étant un nombre entier naturel entre 1 et  $n$ ,  $A^k = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i^k [Z_i]^T \cdot [X_i]$

**Question 36 :** En désignant par  $\chi_A(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n$  le polynôme caractéristique de  $A$  et en calculant à partir de la question précédente la matrice  $B = A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \dots + a_n I_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ , on en déduit que :

- A)  $B$  est la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- B)  $B = A^T$
- C)  $B$  est toujours une matrice diagonale
- D) Si pour tout  $i$ ,  $\lambda_i$  est différent de 0, alors

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_n} (A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + a_2 A^{n-3} + \dots + a_{n-1} I_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}).$$

On se propose maintenant d'appliquer les résultats précédents à la matrice :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Pour certaines questions qui suivent il sera utile de déterminer les polynômes caractéristiques, les valeurs propres et des vecteurs propres de  $A$  et  $A^T$ .

Les valeurs propres de  $A$  seront classées de la façon suivante :  $|\lambda_1| < |\lambda_2| < |\lambda_3|$

**Question 37 :** Soient les vecteurs  $U = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $V = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 0 \\ -1/6 \end{pmatrix}$

- A)  $|U| \cdot |V|^T = 1$
- B)  $[U]^T \cdot |V| = 1$
- C) Le polynôme caractéristique de la matrice  $|U| \cdot |V|^T$  admet comme racines  $-1, 0, 1$
- D)  $[U] \cdot |V|^T$  est inversible

**Question 38 :** En calculant les termes  $M_1, M_2, M_3$  comme définis dans la question 34, on peut dire :

- A) La somme des colonnes de  $M_1$  est le vecteur nul
- B) La somme des colonnes de  $M_2$  ou  $M_3$  est le vecteur nul
- C) Les colonnes de  $M_1, M_2, M_3$ , différentes du vecteur nul, sont des vecteurs propres de  $A$
- D)  $M_1, M_2, M_3$  ont les mêmes valeurs propres  $-1, 0, 1$

**Question 39 :** La somme  $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3$  a pour valeur :

- A) La matrice  $I_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$
- B) La matrice nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- C) La matrice  $A$
- D) La matrice  $A^t$

**Question 40 :** On définit  $\Sigma$  par ,  $\Sigma = 10A^{-1} - 8(A^{-1})^2$  alors :

- A)  $\Sigma$  est la matrice nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- B)  $\Sigma$  est la matrice  $A + I_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$
- C) La trace de  $\Sigma$  vaut 0
- D) La trace de  $\Sigma$  vaut 2

CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT  
D'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE



**ÉPREUVE OBLIGATOIRE DE  
PHYSIQUE**

Durée : 4 heures

Coefficient : 2



Cette épreuve comporte :

- 1 page de garde recto
- 2 pages de consignes recto-verso
- 1 page d'avertissements recto
- 10 pages de texte recto-verso

**TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT  
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)**

## ÉPREUVE OBLIGATOIRE DE PHYSIQUE

## A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve obligatoire de physique de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé informatiquement.

- 1) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un stylo à encre foncée : bleue ou noire et à bille ou feutre. Vous devez **cocher ou noircir** complètement la case en vue de la lecture informatisée de votre QCM.
- 2) Utilisez le sujet comme brouillon (ou les feuilles de brouillon qui vous seront fournies à la demande par la surveillante qui s'occupe de votre rangée) et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.
- 3) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté informatiquement et de ne pas être corrigé.
- 4) Si vous voulez corriger votre réponse, **n'utilisez pas de correcteur** mais indiquez la nouvelle réponse sur la ligne de repentir.
- 5) Cette épreuve comporte 40 questions obligatoires, **certaines, de numéros consécutifs, peuvent être liées. La liste de ces questions est donnée sur la page d'avertissements.**

**Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.**

- 6) A chaque question numérotée entre 1 et 40, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 41 à 80 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.

Pour chaque ligne numérotée de 1 à 40, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

- ▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question, *la ligne correspondante doit rester vierge.*
- ▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse : *vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.*
- ▶ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes : *vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et **deux seulement.***
- ▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne : *vous devez alors noircir la case E.*

**Attention, toute réponse fautive peut entraîner pour la question correspondante une pénalité dans la note.**

7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Exemple I : Question 1 :

Pour une mole de gaz réel :

- A)  $\lim_{P \rightarrow 0} (PV) = RT$ , quelle que soit la nature du gaz.
- B)  $PV = RT$  quelles que soient les conditions de pression et température.
- C) Le rapport des chaleurs massiques dépend de l'atomicité.
- D) L'énergie interne ne dépend que de la température.

Exemple II : Question 2 :

Pour un conducteur ohmique de conductivité électrique  $\sigma$ , la forme locale de la loi d'OHM est :

- A)  $\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\sigma}$
- B)  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$
- C)  $\vec{E} = \sigma^2 \vec{j}$
- D)  $\vec{j} = \sigma^2 \vec{E}$

Exemple III : Question 3 :

- A) Le travail lors d'un cycle monotherme peut être négatif.
- B) Une pompe à chaleur prélève de la chaleur à une source chaude et en restitue à la source froide.
- C) Le rendement du cycle de CARNOT est  $1 + \frac{T_2}{T_1}$
- D) Le phénomène de diffusion moléculaire est un phénomène réversible.

Vous marquez sur la feuille réponse :

	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
1 -	A	B	C	D	E
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2 -	A	B	C	D	E
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
3 -	A	B	C	D	E
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## AVERTISSEMENTS

*L'usage de calculatrices, de téléphones portables ou de documents personnels n'est pas autorisé.*

*Dans certaines questions, les candidats doivent choisir la réponse parmi plusieurs valeurs numériques. Les valeurs fausses qui sont proposées sont suffisamment éloignées de la valeur exacte arrondie selon les règles habituelles, pour éliminer toute ambiguïté dans le choix de la bonne réponse.*

### Questions liées :

Electromagnétisme : 1 à 10

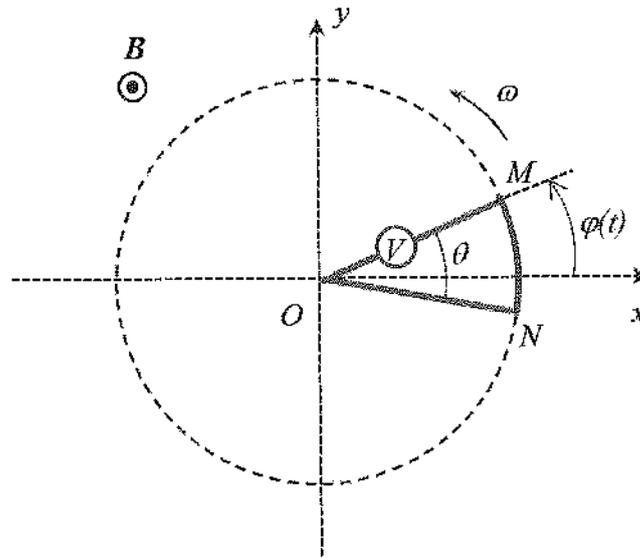
Circuit électrique : 11 à 20

Optique géométrique : 21 à 30

Mécanique : 31 à 40

## Partie 1 : électromagnétisme

Dans le plan horizontal  $xOy$  d'un repère orthonormé direct  $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , un circuit indéformable constitué de 2 lignes conductrices  $OM$  et  $ON$  de longueur  $R$  et reliées par l'arc de cercle conducteur  $MN$  sont en rotation autour de  $O$ , à l'instant  $t$ , à la vitesse angulaire  $\omega(t)$ . L'angle constant entre les segments  $OM$  et  $ON$  est  $\theta$  avec  $0 < \theta < \pi$ . L'ensemble du circuit  $OMN$ , dont la tension est mesurée à l'aide d'un voltmètre non idéal  $V$ , possède une résistance électrique  $r$ . Uniquement dans le demi-plan supérieur  $y > 0$  existe un champ magnétique constant  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ , tel que  $\vec{e}_z$  désigne le vecteur unitaire orientant l'axe  $Oz$ .



À  $t = 0$ , le segment  $OM$  est confondu avec l'axe  $Ox$  et l'abscisse de  $M$  est positive. On désignera par la suite  $\varphi(t)$  l'angle entre l'axe  $Ox$  et le segment  $OM$ . Le circuit sera orienté positivement, de manière à ce que la normale au plan du circuit soit  $\vec{e}_z$ .

Dans un premier temps, on se restreint au cas où  $0 < \varphi(t) < \theta$  (Cas 1).

**Question 1** La force électromotrice induite  $e$  qui apparaît dans le circuit s'écrit :

- A)  $e = \frac{BR^2}{2} \dot{\theta}$
- B)  $e = -\frac{BR^2}{2} \dot{\theta}$
- C)  $e = \frac{BR^2}{2} \omega$
- D)  $e = \frac{BR^2}{2} \dot{\varphi}$

**Question 2** On déduit de la loi de Lenz que :

- A) le courant induit s'oppose à la rotation du cadre.
- B) le courant induit parcourt le circuit  $OMN$  en faisant le chemin  $M \rightarrow N \rightarrow O \rightarrow M$ .
- C) le courant induit parcourt le circuit  $OMN$  en faisant le chemin  $N \rightarrow M \rightarrow O \rightarrow N$ .
- D) le courant induit s'oppose à la force électromotrice induite.

**Question 3** Le courant induit  $i_i$  a pour expression :

- A)  $i_i = -\frac{e}{r}$
- B)  $i_i = \frac{BR^2}{2r}\dot{\theta}$
- C)  $i_i = -\frac{BR^2}{2r}\omega$
- D)  $i_i = -\frac{BR^2}{2r}\dot{\varphi}$

**Question 4** On considère que seule la partie de la force de Laplace agissant sur la partie radiale du circuit dans le champ magnétique (segment  $OM$  pour cette question) peut influencer le circuit.  $\vec{e}_\varphi$  désignant le vecteur unitaire orthoradial, l'expression de la force de Laplace agissant sur le circuit est :

- A)  $\vec{F}_L = -\frac{B^2 R^3 \dot{\varphi}}{2r} \vec{e}_\varphi$
- B)  $\vec{F}_L = \frac{B^2 R^3}{4r} \varphi^2 \vec{e}_\varphi$
- C)  $\vec{F}_L = \frac{B^2 R^3 \dot{\varphi}}{2r} \vec{e}_\varphi$
- D)  $\vec{F}_L = \frac{B^2 R^3}{4r} \omega^2 \vec{e}_\varphi$

**Question 5** La force de Laplace :

- A) Accélère le mouvement de rotation.
- B) Freine le mouvement de rotation.
- C) Augmente la valeur de l'intensité du courant induit.
- D) Diminue la valeur de l'intensité du courant induit.

**Question 6** L'énergie  $E_J$  dissipée par effet Joule lorsque  $\varphi(t)$  passe de 0 à  $\theta$  s'exprime selon :

- A)  $E_J = \frac{B^2 R^4 \dot{\varphi}^2}{4r}$
- B)  $E_J = \frac{B^2 R^4 \dot{\theta}^2}{4r}$
- C)  $E_J = -\frac{B^2 R^4 \dot{\theta}^2}{4r}$
- D)  $E_J = \frac{B^2 R^4 \omega^2}{4r}$

**Question 7** Lorsque  $\theta < \varphi(t) < \pi$  (Cas 2) et par rapport aux résultats obtenus pour le cas 1, on remarque que :

- A)  $e$ ,  $i_i$  et  $F_L$  sont inchangés.
- B)  $e$  et  $i_i$  ont des valeurs identiques, et  $F_L$  a un sens opposé.
- C)  $e$  et  $i_i$  ont des valeurs de signe contraire, et  $F_L$  a un sens identique.
- D)  $e$  et  $i_i$  ont des valeurs de signe contraire, et  $F_L$  a un sens opposé.

On suppose maintenant que  $\pi < \varphi(t) < \pi + \theta$  (Cas 3).

**Question 8** Si on compare les résultats obtenus dans le cas 1 et le cas 3 :

- A) La force électromotrice obtenue dans le cas 3 est la même que celle obtenue dans le cas 1.
- B) La force électromotrice obtenue dans le cas 3 a un signe opposé à celle obtenue dans le cas 1.
- C) Le courant induit dans le cas 3 circule dans le même sens que le courant induit du cas 1.
- D) Le courant induit dans le cas 3 circule en sens inverse du courant induit du cas 1.

**Question 9** Si on compare les résultats obtenus dans le cas 2 et le cas 3 :

- A) La force électromotrice obtenue dans le cas 3 est la même que celle obtenue dans le cas 2.
- B) La force électromotrice obtenue dans le cas 3 a un signe opposé à celle obtenue dans le cas 2.
- C) Le courant induit dans le cas 3 circule dans le même sens que le courant induit du cas 2.
- D) Le courant induit dans le cas 3 circule en sens inverse du courant induit du cas 2.

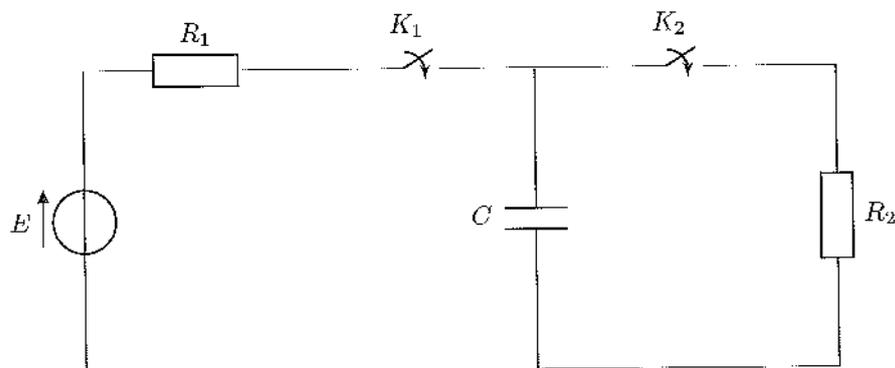
**Question 10** Les expressions des forces de Laplace s'exerçant sur le circuit, obtenues dans le cas 1 et le cas 3 :

- A) Ont la même expression.
- B) Sont de signe opposé.
- C) Ont la même direction.
- D) Sont de sens contraire.

---

### Partie 2 : circuit électrique

On considère le circuit ci-dessous constitué d'un générateur de force électromotrice  $E = 10 \text{ V}$ , deux interrupteurs  $K_1$  et  $K_2$ , deux conducteurs ohmiques de résistances  $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$  et  $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$ , et un condensateur idéal de capacité  $C$ .



Le condensateur est initialement déchargé, et les interrupteurs  $K_1$  et  $K_2$  sont ouverts. A l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur  $K_1$ .

On note  $i(t)$  le courant traversant, en convention générateur, le générateur de force électromotrice  $E$ , et  $u_{c1}(t)$  la tension aux bornes du condensateur prise en convention récepteur par rapport à  $i(t)$ . Pour toute la suite de l'exercice, les différentes tensions étudiées aux bornes du condensateur seront prises dans le même sens que  $u_{c1}(t)$ .

**Question 11** L'équation différentielle vérifiée par la tension  $u_{c1}(t)$ , et la constante de temps  $\tau_1$  du circuit s'écrivent :

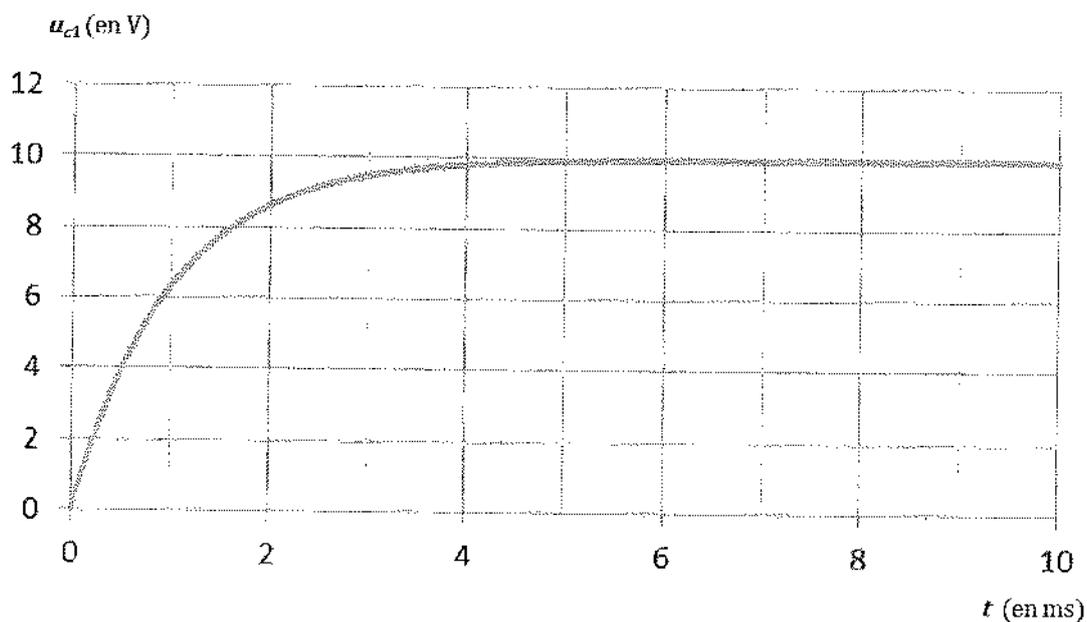
A)  $\frac{du_{c1}}{dt} + \frac{1}{\tau_1}u_{c1} = \frac{E}{\tau_1}$

B)  $\frac{du_{c1}}{dt} + \tau_1 u_{c1} = E\tau_1$

C)  $\tau_1 = \frac{1}{R_1 C}$

D)  $\tau_1 = R_1 C$

Les variations de  $u_{c1}(t)$  sont représentées sur la figure ci-dessous.



**Question 12** On en déduit les valeurs de  $\tau_1$  et de la capacité  $C$  suivantes :

A)  $\tau_1 \simeq 1$  ms

B)  $\tau_1 \simeq 5$  ms

C)  $C \simeq 500$  nF

D)  $C \simeq 2.5$  pF

**Question 13** Les expressions de  $u_{c1}(t)$  et de  $i(t)$  sont :

A)  $u_{c1}(t) = E e^{-\frac{t}{\tau_1}}$

B)  $u_{c1}(t) = E e^{-t\tau_1}$

C)  $i(t) = \frac{E}{R_1} e^{-t\tau_1}$

D)  $i(t) = C E e^{-\frac{t}{\tau_1}}$

**Question 14** La valeur de l'intensité  $i(t = 0^+)$  juste après la fermeture du circuit, et la valeur  $i(t = 10 \text{ ms})$ , de l'intensité au bout de 10 ms sont :

- A)  $i(t = 0^+) = 0 \text{ mA}$
- B)  $i(t = 0^+) = \frac{E}{R_1}$
- C)  $i(t = 10 \text{ ms}) \simeq 0 \text{ mA}$
- D)  $i(t = 10 \text{ ms}) \simeq \frac{E}{R_1}$

**Question 15** Pendant cette phase :

- A) Le condensateur se charge.
- B) Le condensateur se décharge.
- C) Le condensateur se comporte comme un générateur.
- D) Le condensateur se comporte comme un récepteur.

À l'instant  $t_1 = 10 \text{ ms}$ , on ouvre l'interrupteur  $K_1$ , l'interrupteur  $K_2$  demeurant ouvert.

**Question 16** On observe qu'à partir de  $t_1$  :

- A) Le condensateur se charge.
- B) Le condensateur se décharge.
- C) Le condensateur se comporte comme un générateur.
- D) Le condensateur se comporte comme un récepteur.

**Question 17** L'équation vérifiée par la tension  $u_{c2}(t)$  aux bornes du condensateur est alors :

- A)  $u_{c2}(t) = E e^{-\frac{2t}{\tau_1}}$
- B)  $u_{c2}(t) = E e^{-\frac{t}{2\tau_1}}$
- C)  $u_{c2}(t) = 0$
- D)  $u_{c2}(t) = E$

À l'instant  $t_2 = 20 \text{ ms}$ , on ferme l'interrupteur  $K_2$ , l'interrupteur  $K_1$  demeurant ouvert.

**Question 18** On observe qu'à partir de  $t_2$  :

- A) Le condensateur se charge.
- B) Le condensateur se décharge.
- C) Le condensateur se comporte comme un générateur.
- D) Le condensateur se comporte comme un récepteur.

**Question 19** L'équation différentielle vérifiée par la tension  $u_{c3}(t)$  aux bornes du condensateur et la valeur de la constante de temps  $\tau_3$  du circuit vérifient :

- A)  $\frac{du_{c3}}{dt} - \frac{1}{\tau_3} u_{c3}(t) = 0$
- B)  $\frac{du_{c3}}{dt} + \tau_3 u_{c3}(t) = E$
- C)  $\tau_3 = 2\tau_1$
- D)  $\tau_3 = \frac{\tau_1}{2}$

**Question 20** La tension  $u_{c3}(t)$  aux bornes du condensateur, et l'intensité  $i_3(t)$  qui parcourt le circuit (prise en convention récepteur aux bornes du condensateur) s'écrivent :

- A)  $u_{c3}(t) = E e^{-\frac{t}{\tau_3}}$
- B)  $u_{c3}(t) = -E e^{-\frac{t}{\tau_3}}$
- C)  $i_3(t) = \frac{E}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau_3}}$
- D)  $i_3(t) = -\frac{E}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau_3}}$

### Partie 3 : optique géométrique

On rappelle que pour une lentille mince de distance focale image  $f'$ , de centre  $O$ , de foyers principal objet  $F$  et principal image  $F'$ , et pour un objet ponctuel  $A$  et son image ponctuelle  $A'$ , repérés par les mesures algébriques objet  $p = \overline{OA}$  ou  $\sigma = \overline{FA}$  et image  $p' = \overline{OA'}$  ou  $\sigma' = \overline{F'A'}$ , on a les relations suivantes :

- Relation de conjugaison de Descartes :  $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$
- Relation de conjugaison de Newton :  $\sigma\sigma' = -f'^2$
- Grandissement transversal :  $G_t = \frac{p'}{p}$

Une lentille mince ( $\mathcal{L}_1$ ), de distance focale image égale à  $-3$  cm, centrée sur l'axe  $z'z$ , est placée en  $O_1$ . Une lentille mince ( $\mathcal{L}_2$ ), de distance focale image égale à  $+10$  cm, centrée sur l'axe  $z'z$ , est placée en  $O_2$  de telle sorte que  $e = \overline{O_1O_2} > 0$ . Le système ainsi constitué est placé dans l'air d'indice de réfraction  $n_o = 1$ .

**Question 21** Concernant les deux lentilles ( $\mathcal{L}_1$ ) et ( $\mathcal{L}_2$ ) :

- A) ( $\mathcal{L}_1$ ) est convergente.
- B) ( $\mathcal{L}_1$ ) est divergente.
- C) ( $\mathcal{L}_2$ ) est convergente.
- D) ( $\mathcal{L}_2$ ) est divergente.

**Question 22** Les vergences  $V_1$  et  $V_2$ , respectivement de  $(\mathcal{L}_1)$  et  $(\mathcal{L}_2)$  valent :

- A)  $V_1 = 33 \delta$
- B)  $V_1 = -33 \delta$
- C)  $V_2 = -10 \delta$
- D)  $V_2 = 10 \delta$

**Question 23** Les deux lentilles sont associées de manière à former un système  $(S)$  de vergence nulle.

- A) Les deux lentilles sont accolées.
- B) Les deux lentilles sont distantes de 7 cm.
- C) Les deux lentilles sont distantes de 13 cm.
- D) Les deux lentilles sont distantes de 6 cm.

**Question 24** Concernant les foyers principaux objet  $F_o$  et image  $F_i$  de  $(S)$ , on a :

- A)  $F_o$  est à 3 cm avant  $L_1$ .
- B)  $F_o$  est à 3 cm après  $L_1$ .
- C)  $F_i$  est à 10 cm avant  $L_2$ .
- D)  $F_i$  est à 10 cm après  $L_2$ .

**Question 25** Pour le système  $(S)$ , le grandissement transversal est :

- A) Indépendant de la position de l'objet.
- B) Indépendant de la position de l'image.
- C) Egal à 0.
- D) Egal à  $-1$ .

**Question 26** Si l'objet est positionné dans le plan focal objet de  $(\mathcal{L}_1)$ , l'image finale donnée par le système  $(S)$  est située :

- A) Dans le plan focal image de  $(\mathcal{L}_1)$ .
- B) Dans le plan focal objet de  $(\mathcal{L}_2)$ .
- C) Dans le plan focal image de  $(\mathcal{L}_2)$ .
- D) À l'infini.

**Question 27** Si l'objet est confondu avec le centre  $O_1$  de la lentille  $(\mathcal{L}_1)$ , l'image finale donnée par le système  $(S)$  est :

- A) Réelle.
- B) Située dans le plan focal image de  $(\mathcal{L}_1)$ .
- C) Située dans le plan focal image de  $(\mathcal{L}_2)$ .
- D) Située à l'infini.

**Question 28** Si l'objet est confondu avec le centre  $O_2$  de la lentille ( $\mathcal{L}_2$ ), l'image finale donnée par le système ( $\mathcal{S}$ ) est :

- A) Réelle.
- B) Située dans le plan focal image de ( $\mathcal{L}_1$ ).
- C) Située dans le plan focal image de ( $\mathcal{L}_2$ ).
- D) Située à l'infini.

**Question 29** Le système ( $\mathcal{S}$ ) schématise :

- A) Un microscope.
- B) Une lunette astronomique.
- C) Un télescope réflecteur.
- D) Une loupe.

**Question 30** Les lentilles restant dans leur position, on inverse le sens de propagation de la lumière. Ce nouveau système ( $\mathcal{S}'$ ) schématise :

- A) Un microscope.
- B) Une lunette astronomique.
- C) Un télescope réflecteur.
- D) Une loupe.

#### Partie 4 : mécanique

Dans le référentiel galiléen du laboratoire, muni du repère cartésien orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , un solide constitué par une tige rigide infiniment fine  $AB$ , de longueur  $\ell$ , de masse  $m$  et de centre de masse  $G$  (de coordonnées cartésiennes  $(0, 0, 2\ell)$ ), est en rotation à la vitesse angulaire  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ . L'axe  $(O, \vec{e}_z)$  est orienté dans le sens de la verticale ascendante.

On rappelle :

- Le moment d'inertie d'une barre de longueur  $2L$  et de masse  $M$ , par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et passant par son centre de masse est  $\frac{ML^2}{3}$ .
- Le moment d'inertie d'une boule de rayon  $R$  et de masse  $M$ , par rapport à un de ses diamètres, est  $\frac{2}{5}MR^2$ .
- Le moment d'inertie  $I_\Delta$  d'un solide de masse  $m$  par rapport à un axe  $\Delta$  est relié au moment d'inertie  $I_{\Delta_G}$  de ce même solide par rapport à un axe  $\Delta_G$  passant par le centre de masse  $G$  du solide, parallèle à  $\Delta$  et distants de  $d$  de  $\Delta$  par la relation :  $I_\Delta = I_{\Delta_G} + md^2$ .

On notera  $I = \frac{m\ell^2}{3}$ .

**Question 31** La tige  $AB$  est telle que  $\vec{AB} = \ell \vec{e}_z$ . L'énergie cinétique de la barre est égale à :

- A) 0
- B)  $\frac{1}{2}m\ell^2\omega^2$
- C)  $\frac{1}{2}m(2\ell)^2\omega^2$
- D)  $\frac{1}{2}I\omega^2$

**Question 32** La tige  $AB$ , perpendiculaire à  $\vec{e}_z$ , tourne autour de l'axe  $Gz$ . Son énergie cinétique est égale à :

- A) 0
- B)  $\frac{1}{2}m\ell^2\omega^2$
- C)  $\frac{1}{2}m(2\ell)^2\omega^2$
- D)  $\frac{1}{2}I\omega^2$

**Question 33** La tige  $AB$ , perpendiculaire à  $\vec{e}_z$ , tourne autour de l'axe  $Az$ . L'énergie cinétique de la barre est égale à :

- A) 0
- B)  $\frac{1}{2}m\ell^2\omega^2$
- C)  $\frac{1}{2}m(2\ell)^2\omega^2$
- D)  $\frac{1}{2}I\omega^2$

On constitue un solide  $S_1$  en soudant, au niveau de l'extrémité  $A$  de la tige précédente, une boule pleine homogène  $B_1$  de masse  $5m$  et de rayon  $\frac{\ell}{2}$ .  $A$  est un point de la surface de  $B_1$ , et  $G_1$  est le centre de masse de  $B_1$ , tel que les points  $A$ ,  $B$  et  $G_1$  sont alignés.

**Question 34** La tige  $AB$  est telle que  $\vec{AB} = \ell\vec{e}_z$ . L'énergie cinétique du solide  $S_1$  est égale à :

- A) 0
- B)  $\frac{3}{4}I\omega^2$
- C)  $\frac{19}{8}I\omega^2$
- D)  $\frac{25}{8}I\omega^2$

**Question 35** La tige  $AB$  est perpendiculaire à  $\vec{e}_z$ , et le solide  $S_1$  tourne autour de l'axe  $Gz$ . L'énergie cinétique du solide  $S_1$  est égale à :

- A) 0
- B)  $\frac{6}{8}I\omega^2$
- C)  $\frac{19}{8}I\omega^2$
- D)  $\frac{25}{8}I\omega^2$

**Question 36** La tige  $AB$  est perpendiculaire à  $\vec{e}_z$ , et le solide  $\mathcal{S}_1$  tourne autour de l'axe  $G_1z$ . L'énergie cinétique du solide  $\mathcal{S}_1$  est égale à :

- A) 0
- B)  $\frac{6}{8}I\omega^2$
- C)  $\frac{19}{8}I\omega^2$
- D)  $\frac{25}{8}I\omega^2$

**Question 37** La tige  $AB$  est perpendiculaire à  $\vec{e}_z$ , et le solide  $\mathcal{S}_1$  tourne autour de l'axe  $Az$ . L'énergie cinétique du solide  $\mathcal{S}_1$  est égale à :

- A) 0
- B)  $\frac{6}{8}I\omega^2$
- C)  $\frac{19}{8}I\omega^2$
- D)  $\frac{25}{8}I\omega^2$

Pour les questions suivantes, le solide est dans la position de la **Question 37**, et sa rotation s'effectue avec des frottements.

**Question 38** Le système  $(\mathcal{S}_1)$  présente :

- A) une variation d'énergie cinétique nulle.
- B) une variation d'énergie potentielle nulle.
- C) un moment cinétique nul.
- D) une puissance des actions de contact nulle.

**Question 39** Un moteur  $(\mathcal{M})$  est nécessaire pour maintenir une rotation uniforme de  $(\mathcal{S}_1)$ . Le mouvement de  $(\mathcal{S}_1)$  se caractérise par :

- A) une variation d'énergie cinétique nulle.
- B) une variation d'énergie potentielle nulle.
- C) un moment cinétique nul.
- D) une puissance des actions de contact nulle.

**Question 40** La puissance  $\mathcal{P}$  du moteur vérifie :

- A)  $\mathcal{P} = 0$
- B)  $\mathcal{P} = -\frac{6}{8}I\omega\dot{\omega}$
- C)  $\mathcal{P} = -\frac{19}{8}I\omega\dot{\omega}$
- D)  $\mathcal{P} = -\frac{25}{8}I\omega\dot{\omega}$

CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT  
D'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE



**ÉPREUVE FACULTATIVE DE  
CONNAISSANCES AERONAUTIQUES**

Durée : 1 heure

Coefficient : Bonus



Cette épreuve comporte :

- 1 page de garde recto
- 1 page de consignes recto
- 5 pages de texte recto-verso

**TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT  
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)**

**ÉPREUVE FACULTATIVE DE CONNAISSANCES AÉRONAUTIQUES***A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT*

L'épreuve facultative de connaissances aéronautiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé informatiquement.

- 1) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un stylo à encre foncée : bleue ou noire et à bille ou feutre. Vous devez **cocher ou noircir** complètement la case en vue de la lecture informatisée de votre QCM.
- 2) Utilisez le sujet comme brouillon (ou les feuilles de brouillon qui vous seront fournies à la demande par la surveillante qui s'occupe de votre rangée) et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.
- 3) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté informatiquement et de ne pas être corrigé.
- 4) Si vous voulez corriger votre réponse, **n'utilisez pas de correcteur** mais indiquez la nouvelle réponse sur la ligne de repentir.
- 5) Cette épreuve comporte 20 questions obligatoires. Vous devez donc porter vos réponses sur les lignes numérotées de 1 à 20. N'utilisez en aucun cas les lignes numérotées de 21 à 80. Veillez à bien porter vos réponses sur la ligne correspondant au numéro de la question.

Pour chaque ligne numérotée de 1 à 20, vous vous trouvez en face de 2 possibilités :

- ▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question, *la ligne correspondante doit rester vierge.*
- ▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse : *vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D*

### QUESTION N°1

**Le sigle AESA signifie :**

- A. Agence Européenne de la Sûreté Aérienne.
- B. Agence Européenne de la Sécurité Aérienne.
- C. Aviation European Safety Agency.
- D. Agence Européenne de la Surveillance Aérienne.

### QUESTION N°2

**Le BEA est :**

- A. Le Bureau d'Etudes de l'Aviation.
- B. Le Bureau d'Enquêtes-Accidents.
- C. La Base Européenne de l'Armée de l'air.
- D. Le Bureau d'Enquêtes et d'Analyses.

### QUESTION N°3

**Lorsque l'on monte en altitude :**

- A. La pression partielle d'oxygène diminue, avec un risque d'hyperoxie.
- B. La pression partielle d'oxygène diminue, avec un risque d'hypoxie.
- C. La pression partielle d'oxygène augmente, avec un risque d'hyperoxie.
- D. La pression partielle d'oxygène augmente, avec un risque d'hypoxic.

### QUESTION N°4

**Le profil aérodynamique karman :**

- A. Est destiné à améliorer la portance de l'aile.
- B. Est destiné à augmenter l'allongement de l'aile.
- C. Est destiné à optimiser l'écoulement de l'air.
- D. Est destiné à optimiser les atterrissages courts.

**Tournez la page S.V.P.**

QUESTION N°5

**En espace aérien de classe D, les services de la circulation aérienne assurés sont :**

- A. Les séparations entre IFR et VFR.
- B. Les séparations entre VFR.
- C. Les séparations à tous les aéronefs.
- D. Les séparations entre IFR, des informations de trafic entre IFR et VFR et entre VFR.

QUESTION N°6

**L'orientation de la roulette de queue sur un train classique se fait grâce :**

- A. Aux gouvernes de profondeur.
- B. Aux gouvernes de trim.
- C. Aux palonniers.
- D. Au manche.

QUESTION N°7

**La  $V_{NE}$  désigne :**

- A. La vitesse à ne pas dépasser en atmosphère turbulente.
- B. La vitesse à ne pas dépasser sauf en cas d'urgence pour respecter une heure d'arrivée.
- C. La vitesse maximum avec un moteur neuf (Vitesse New Engine).
- D. La vitesse à ne pas dépasser.

QUESTION N°8

**Plus il fait froid :**

- A. Plus l'altitude lue sur l'altimètre est sous-estimée.
- B. Plus l'altitude lue sur l'altimètre est surestimée.
- C. Plus l'altitude lue sur l'altimètre est précise.
- D. Plus je dois chercher à voler au calage standard.

### QUESTION N°9

Posé sur un aérodrome d'altitude 510 ft, où vous ne disposez pas des paramètres, vous voulez évaluer le QNH. Votre altimètre, aiguilles à 0, fait apparaître 1015 hPa dans la fenêtre des pressions. Le QNH (ainsi approché) est de :

- A. 998 hPa.
- B. 1013 hPa.
- C. 1023 hPa.
- D. 1032 hPa.

✦

### QUESTION N°10

La trainée induite est une conséquence :

- A. Des tourbillons créés par l'hélice du moteur.
- B. De la surface de l'aile.
- C. De la longueur de l'empennage.
- D. Des tourbillons de Prandtl.

### QUESTION N°11

La turbulence de sillage est :

- A. Une conséquence des tourbillons marginaux.
- B. Très faible pour un hélicoptère par rapport à un avion léger.
- C. Inexistante pour un avion de chasse, surtout s'il est furtif.
- D. Négligeable dès lors que l'avion pèse moins de 150 t.

### QUESTION N°12

Quel instrument n'a pas besoin de la pression statique pour fonctionner ?

- A. L'anémomètre.
- B. Le variomètre.
- C. L'horizon artificiel.
- D. L'altimètre.

**Tournez la page S.V.P.**

QUESTION N°13

**Sur l'anémomètre, l'arc blanc correspond à :**

- A. La plage de vitesse d'utilisation de l'aéronef volets sortis mais train rentré.
- B. La plage des vitesses d'utilisation train sorti mais volets rentrés.
- C. La plage des vitesses interdites en atmosphère turbulente.
- D. La plage des vitesses d'utilisation entre la vitesse de décrochage volets et train sortis et la vitesse maximale d'utilisation des volets.

QUESTION N°14

**En montée vers un niveau de vol, altimètre calé au QNH, je change le calage de l'altimètre :**

- A. Au passage de l'altitude de transition.
- B. Au passage de l'altitude de transition si je fais un palier dans la couche de transition.
- C. Au passage du niveau de transition.
- D. Après le passage du niveau de transition.

QUESTION N°15

**Après décollage, afin de franchir un obstacle sur ma route avec la marge de franchissement réglementaire :**

- A. J'effectue une montée normale mais plein gaz.
- B. J'effectue une montée à Vz max.
- C. J'effectue une montée à pente max.
- D. J'effectue une montée à VO2 max.

QUESTION N°16

**On parle d'occlusion lorsque :**

- A. Le front chaud rattrape le front froid.
- B. Le front froid rattrape le front chaud.
- C. Deux fronts chauds fusionnent.
- D. Deux fronts froids fusionnent.

QUESTION N°17

**Dans un METAR, HZ correspond à :**

- A. Neige en poudre.
- B. Cendres volcaniques.
- C. Tempête de poussière.
- D. Brume sèche.

QUESTION N°18

**Au cap 050, le 300 est sélectionné sur la couronne de mon indicateur VOR, l'aiguille est centrée, et l'indicateur FROM est affiché. Je me trouve au :**

- A. Nord-Ouest de la station.
- B. Nord-Est de la station.
- C. Sud-Ouest de la station.
- D. Sud-Est de la station.

QUESTION N°19

**Je suis en finale sur un plan à 3° à une Vz de 450 ft/min, ma vitesse sol est d'environ :**

- A. 60 kt.
- B. 90 kt.
- C. 120 kt.
- D. 150 kt.

QUESTION N°20

**A l'arrivée sur un terrain vous constatez la présence de cette indication sur l'aire à signaux :**



**Vous en déduisez :**

- A. La fermeture de la piste pour travaux.
- B. La direction d'atterrissage.
- C. L'utilisation de l'aérodrome par des planeurs, avec des vols en cours.
- D. Une portion de la piste est inutilisable.

CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT  
D'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE



**ÉPREUVE FACULTATIVE  
D'INFORMATIQUE**

Durée : 1 heure

Coefficient : Bonus



Cette épreuve comporte :  
1 page de garde recto  
2 pages de consignes recto-verso  
1 page d'avertissements recto  
9 pages de texte recto-verso

**TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT  
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)**

## ÉPREUVE FACULTATIVE D'INFORMATIQUE

## A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve facultative d'informatique de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé informatiquement.

- 1) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un stylo à encre foncée : bleue ou noire et à bille ou feutre. Vous devez **cocher ou noircir** complètement la case en vue de la lecture informatisée de votre QCM.
- 2) Utilisez le sujet comme brouillon (ou les feuilles de brouillon qui vous seront fournies à la demande par la surveillante qui s'occupe de votre rangée) et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.
- 3) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté informatiquement et de ne pas être corrigé.
- 4) Si vous voulez corriger votre réponse, **n'utilisez pas de correcteur** mais indiquez la nouvelle réponse sur la ligne de repentir.
- 5) Cette épreuve comporte 20 questions ; **certaines, de numéros consécutifs, peuvent être liées. La liste de ces questions est donnée sur la page d'avertissements.**

**Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.**

A chaque question numérotée entre 1 et 20, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 21 à 80 seront neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.

Pour chaque ligne numérotée de 1 à 20, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

- ▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question, *la ligne correspondante doit rester vierge.*
- ▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse : *vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.*
- ▶ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes : *vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et deux seulement.*
- ▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne : *vous devez alors noircir la case E.*

**Attention, toute réponse fausse peut entraîner pour la question correspondante une pénalité dans la note.**

**Tournez la page S.V.P.**

6) Exemple de réponses :

Question 1 : Après l'exécution de la commande Python a=2, la valeur de a est:

- A) 2
- B) 4
- C) 6
- D) 8

Question 2 : Après l'exécution de la commande Python a=2, la valeur de a est:

- A) 3
- B) 4
- C) 5
- D) 6

Question 3 : Après l'exécution de la commande Python L=[1,2,3], on peut affirmer que :

- A) L est une liste
- B) L est vide
- C) L contient 3 éléments
- D) L est un booléen

Vous marquerez sur la feuille réponse :

	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
1 -	A	B	C	D	E
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
2 -	A	B	C	D	E
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3 -	A	B	C	D	E
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## AVERTISSEMENTS

Les scripts et fonctions Python présentés dans les énoncés sont rédigés en Python 3.

Les questions 17 à 20 sont liées.

**Question 1 :**

Dans un ordinateur, la mémoire virtuelle est :

- A) une partie de la mémoire de masse utilisée comme extension de la mémoire vive.
- B) utilisée pour faire fonctionner un logiciel de virtualisation.
- C) la duplication de la mémoire vive afin de remédier à un éventuel plantage système.
- D) d'un accès plus rapide que la mémoire cache.

**Question 2 :**

Présente dans plusieurs langages de programmation dont Python, la gestion des exceptions permet :

- A) de rendre plus modulaire la programmation.
- B) de différer le traitement des cas particuliers.
- C) d'éviter que le programme ne s'arrête brutalement.
- D) de différer le traitement des cas généraux.

**Question 3 :**

Quelle(s) est/sont l'/les assertion(s) fausse(s) à propos du langage de programmation Python parmi les assertions suivantes ?

- A) C'est un langage de programmation orienté objet, multi-paradigme et multiplateformes.
- B) C'est un langage de programmation compilé à l'image du langage C.
- C) C'est un langage de programmation qui utilise des accolades pour repérer les différents blocs d'un programme.
- D) C'est un langage de programmation doté d'un typage dynamique fort.

**Question 4 :**

Quel que soit le langage de programmation utilisé, une structure de contrôle sert à :

- A) contrôler un programme à partir d'un sous-programme appelé.
- B) contrôler le passage des paramètres entre le programme et les sous-programmes.
- C) prendre des décisions suivant certaines conditions.
- D) réaliser des itérations.

**Tournez la page S.V.P.**

### Question 5 :

L'algorithme suivant approxime l'équation  $f(x)=0$  ( $f$  définie et strictement monotone sur l'intervalle  $[A;B]$ ) :

```
Entrée : trois réels (A, B, epsilon)
Sortie : un affichage

SI (f(A)*f(B)) ≥ 0 ALORS
  Afficher("Pas de racines réelles entre ", A, " et ", B)
SINON
  TANT QUE (B-A ≥ epsilon) FAIRE
    m ← (A+B)/2
    SI (f(A)*f(m) ≤ 0) ALORS
      B ← m
    SINON
      A ← m
    FIN SI
  FIN TANT QUE
  Afficher("Une racine existe entre ", A, " et ", B)
FIN SI
```

L'analyse de cet algorithme :

- A) montre qu'il y a une erreur dans la formulation de la condition TANT QUE.
- B) permet de résoudre l'équation par la méthode de la sécante.
- C) permet de résoudre l'équation par une méthode de recherche dichotomique.
- D) démontre qu'il y a un risque de boucle infinie, la variable epsilon n'étant pas modifiée dans la boucle.

### Question 6 :

Soit le programme Python suivant qui calcule une approximation de la racine d'une fonction réelle continue d'une variable réelle (ici  $x^2-10$ ) :

```
def precision(a, b, prec):
    if (f(a) * f(b)) >= 0:
        print("Pas de racines réelles...")
    else:
        while (b - a) < prec:
            print(a,b)
            if (f(a) * f((a+b)/2)) <= 0:
                b = (a+b)/2
            else:
                a = (a+b)/2
        return a, b

def f(x):
    return x*x-10

xa = 3.0
xb = 3.5
prec = 0.0011
xa, xb = precision(xa, xb, prec)
```

- A) Le programme fournit une approximation de la racine si on inverse le test de la condition du while.
- B) Le programme risque de boucler si on n'encadre pas au préalable la racine par les variables A et B.
- C) Le programme permet de résoudre l'équation par la méthode de Newton.
- D) Le programme boucle indéfiniment étant donné que la variable prec ne varie pas dans la boucle.

**Question 7 :**

En exécutant le sous-programme escalier qui permet de construire le triangle de Pascal à l'aide de la méthode append (ajout d'un élément en fin de liste), quel est le résultat produit ?

```
def escalier(n):
    resultat = []
    ligne = []
    ligne.append(1)
    resultat.append(ligne)
    for i in range(1, n-1):
        ligne = []
        ligne.append(1)
        for j in range(1, i):
            valeur = resultat[i-1][j] + resultat[i-1][j-1]
            ligne.append(valeur)
        ligne.append(1)
        resultat.append(ligne)
    return resultat

nombre = 6
triangle = escalier(nombre)
print(triangle)
```

- A) [[1], [1, 1], [1, 2, 1], [1, 4, 2, 1], [1, 8, 4, 2, 1]]
- B) [[1], [1, 1], [1, 2, 1], [1, 3, 2, 1], [1, 4, 3, 2, 1]]
- C) [[1], [1, 1], [1, 2, 1], [1, 3, 3, 1], [1, 4, 6, 4, 1]]
- D) [[1], [1, 1], [1, 2, 1], [1, 2, 3, 1], [1, 2, 3, 4, 1]]

**Question 8 :**

Pour rechercher un mot dans une phrase et retourner sa position sous la forme d'un indice, l'algorithme le plus efficace devra inclure :

- A) Au moins une structure itérative (for ou while) et éventuellement une instruction conditionnelle.
- B) Au moins deux structures itératives (for et while) et une instruction conditionnelle.
- C) Au moins une structure itérative for et une instruction conditionnelle.
- D) Au moins une structure itérative while et une instruction conditionnelle.

**Tournez la page S.V.P.**

**Question 9 :**

Quelle est la complexité temporelle du tri à bulles pour une entrée de taille  $n$  ?

- A) Dans le meilleur des cas  $O(\log(n))$
- B) De  $O(n)$  à  $O(n^2)$
- C)  $O(n \cdot \log(n))$
- D) Dans le pire des cas  $O(n^2 \cdot \log(n))$

**Question 10 :**

Soit la fonction Python suivante qui réalise un tri :

```
def tri(tableau):
    n = 0
    for i in range(1, len(tableau)):
        x = tableau[i]
        j = i
        while (j > 0 and tableau[j-1] > x):
            tableau[j] = tableau[j-1]
            j = j - 1
        tableau[j] = x
    return n

maListe = [2,6,1,5,4,3]
nombre = tri(maListe)
```

- A) C'est une implémentation de l'algorithme du tri à bulles.
- B) C'est une implémentation de l'algorithme du tri par insertion.
- C) Avec `maListe=[6,5,4,3,2,1]`, la variable `nombre` serait égale à 17.
- D) La valeur de la variable `nombre` est égale à 8.

**Question 11 :**

Considérant la méthode de Newton qui est un algorithme efficace pour trouver numériquement une approximation précise d'une racine d'une fonction réelle continue d'une variable réelle,

- A) l'approximation d'un zéro de la fonction s'opère grâce à une série de Fourier.
- B) les valeurs de la fonction et de la dérivée sont utilisées et la performance de l'algorithme est plus rapide que celui d'une dichotomie.
- C) l'algorithme ne nécessite pas que la fonction dérivée soit effectivement calculée.
- D) l'algorithme ne doit pas inclure de contrôle du nombre d'itérations.

**Question 12 :**

Considérant le sous-programme MethodeNewton suivant qui vise à approximer une racine d'une fonction réelle continue d'une variable réelle (ici  $x^3-3x/2-2$ ) par la méthode de Newton :

```
def MethodeNewton(f, pas, x):
    for i in range(0, pas):
        x1 = x - f(x) / (3*x**2-(3/2))
        x = x1
    return x

def f(x):
    return x**3-(3/2)*x-2

x0 = 8
pas = 10
x = MethodeNewton(f, pas, x0)
print("x = %0.6f" % x)
print("f(x) = %0.6f" % f(x))
```

- A) le nombre d'itérations nécessaires à un résultat probant ne dépend pas de la valeur initiale de la variable  $x_0$ .
- B) il manque la fonction qui calcule la dérivée de la fonction  $f(x)$ .
- C) le résultat  $x$  sera plus proche de 2 que de  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .
- D) le résultat  $f(x)$  sera très proche de 0.

**Question 13 :**

Soit le sous-programme calcul suivant qui calcule une caractéristique d'une fonction réelle d'une variable réelle (ici  $x^2-10$ ) :

```
def calcul(a, b, pas):
    for i in range(0, pas):
        c = (a + b) / 2
        if (f(a) * f(c)) <= 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return a, b

def f(x):
    return x*x-10

a = 0
b = 5
pas = 10
a,b = calcul(a, b, pas)
```

- A) c'est une approximation d'une racine par la méthode d'Euler.
- B) c'est une approximation d'une racine par dichotomie.
- C) c'est une approximation moins performante que la méthode par balayage.
- D) c'est une approximation moins performante car on ne peut fixer la précision.

**Tournez la page S.V.P.**

**Question 14 :**

Quelle est la matrice affichée après l'exécution du programme suivant qui utilise la bibliothèque Numpy et sa classe array disposant de la méthode `itemset` documentée ci-dessous ?

**ndarray.itemset(\*args)**

Insert scalar into an array (scalar is cast to array's dtype, if possible)

There must be at least 1 argument, and define the last argument as *item*. Then, `a.itemset(*args)` is equivalent to but faster than `a[args] = item`. The item should be a scalar value and *args* must select a single item in the array *a*.

**Parameters:** *\*args* : Arguments

If one argument: a scalar, only used in case *a* is of size 1. If two arguments: the last argument is the value to be set and must be a scalar, the first argument specifies a single array element location. It is either an int or a tuple.

```
import numpy as np
A = np.array([[4,1,12,11], [13,13,10,8], [3,7,14,9]])
A.itemset(4, 0)
A.itemset((2, 1), 16)
print(A)
```

A)

```
[[ 4  1 12 11]
 [16 13 10  8]
 [ 3  7 14  9]]
```

B)

```
[[ 4  1 12 11]
 [ 0 13 10  8]
 [ 3 16 14  9]]
```

C)

```
[[ 4  1 12 11]
 [13 13 10  8]
 [ 3 16 14  9]]
```

D)

```
[[ 0  0  0  0]
 [13 13 10  8]
 [ 3 16 14  9]]
```

**Question 15 :**

Soit un programme Python utilisant la bibliothèque Numpy disposant de la méthode `transpose` documentée ci-après :

`ndarray.transpose(*axes)`

Returns a view of the array with axes transposed.

For a 1-D array, this has no effect. (To change between column and row vectors, first cast the 1-D array into a matrix object.) For a 2-D array, this is the usual matrix transpose. For an n-D array, if axes are given, their order indicates how the axes are permuted. If axes are not provided and `a.shape = (i[0], i[1], ..., i[n-2], i[n-1])`, then `a.transpose().shape = (i[n-1], i[n-2], ..., i[1], i[0])`.

**Parameters:** `axes` : None, tuple of ints, or *n* ints

- None or no argument: reverses the order of the axes.
- tuple of ints: *i* in the *j*-th place in the tuple means *a*'s *i*-th axis becomes `a.transpose()`'s *j*-th axis.
- *n* ints: same as an n-tuple of the same ints (this form is intended simply as a "convenience" alternative to the tuple form)

**Returns:** `out` : `ndarray`

View of *a*, with axes suitably permuted.

```
import numpy as np
T = np.array([[4,1,12,11], [13,13,10,8],[3,7,14,9]]) # ligne 1
print(Ttrans)
```

Quelle(s) proposition(s) d'instruction peut-on utiliser en ligne 1 pour obtenir l'affichage suivant ?

```
[[ 4 13  3]
 [ 1 13  7]
 [12 10 14]
 [11  8  9]]
```

- A) `Ttrans = T.transpose(0,1)`
- B) `Ttrans = T.transpose()`
- C) `Ttrans = T.transpose(1,0)`
- D) `Ttrans = T.transpose(0,0)`

**Question 16 :**

Dans une requête SQL, la gestion des valeurs absentes (NULL) :

- A) induit une logique à trois états qui sont VRAI, FAUX et NULL.
- B) implique de s'adapter à une logique qui considère que deux NULL sont différents ou identiques entre eux selon la manière de les comparer.
- C) induit une logique à deux états qui sont VRAI et FAUX, NULL étant assimilé à zéro.
- D) implique de s'adapter à une logique qui considère que deux NULL sont différents.

**Tournez la page S.V.P.**

**Question 17 :**

On considère un extrait de la table `sieges` qui stocke les réservations des clients sur différents vols au cours de l'année :

num_vol	jour_vol	client	siege	prix
AF4143	2025-02-05	4560	01B	440.50
AF4143	2025-02-05	2387	01E	341.00
AF4143	2025-02-05	4560	01A	150.00
AF4143	2025-02-05	2390	02D	220.00
AF4143	2025-02-05	2394	03A	198.00
AF4143	2025-02-05	1400	03B	234.00
AF4143	2025-02-05	5830	03F	140.50
AF4160	2025-02-05	5830	12B	150.00
...				

La clé primaire de la table

- A) n'est pas obligatoire mais plutôt recommandée.
- B) pourrait porter sur le numéro du vol.
- C) devrait porter sur trois ou quatre colonnes.
- D) Toutes les réponses précédentes conviennent.

**Question 18 :**

En considérant la table de la Question 17, la requête suivante est capable d'extraire :

```
select distinct client from sieges
where num_vol = 'AF4160'
or num_vol = 'AF4143'
order by client;
```

- A) les numéros des clients qui ont voyagé sur les deux vols en question quel que soit le jour.
- B) les numéros des clients qui ont voyagé sur un des deux vols en question quel que soit le jour.
- C) les numéros des clients qui ont voyagé sur d'autres vols quel que soit le jour.
- D) aucune ligne.

**Question 19 :**

En considérant la table de la Question 17, la requête suivante est capable d'extraire :

```
select distinct client from sieges
where num_vol = 'AF4160'
and num_vol = 'AF4143'
order by client;
```

- A) les numéros des clients qui ont voyagé sur les deux vols en question quel que soit le jour.
- B) les numéros des clients qui ont voyagé sur un des deux vols en question quel que soit le jour.
- C) les numéros des clients qui ont voyagé sur d'autres vols quel que soit le jour.
- D) aucune ligne.

**Question 20 :**

En considérant la table de la Question 17, afin de connaître les clients qui ont voyagé sur le même vol qu'un client en particulier, il faut utiliser :

- A) uniquement une jointure.
- B) une intersection ou une jointure.
- C) uniquement une intersection.
- D) uniquement une différence.

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

Session 2019

CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT  
D'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE



**ÉPREUVE OBLIGATOIRE À OPTION**  
**PHYSIQUE**

Durée : 4 heures

Coefficient : 3



Cette épreuve comporte :

- 1 page de garde recto
- 2 pages de consignes recto-verso
- 1 page d'avertissements recto
- 8 pages de texte recto-verso

**TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT  
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)**

## ÉPREUVE OBLIGATOIRE A OPTION DE PHYSIQUE

## A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve obligatoire de physique de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé informatiquement.

- 1) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un stylo à encre foncée : bleue ou noire et à bille ou feutre. Vous devez **cocher ou noircir** complètement la case en vue de la lecture informatisée de votre QCM.
- 2) Utilisez le sujet comme brouillon (ou les feuilles de brouillon qui vous seront fournies à la demande par la surveillante qui s'occupe de votre rangée) et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.
- 3) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté informatiquement et de ne pas être corrigé.
- 4) Si vous voulez corriger votre réponse, **n'utilisez pas de correcteur** mais indiquez la nouvelle réponse sur la ligne de repentir.
- 5) Cette épreuve comporte 40 questions obligatoires, **certaines, de numéros consécutifs, peuvent être liées. La liste de ces questions est donnée sur la page d'avertissements.**

**Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.**

- 6) A chaque question numérotée entre 1 et 40, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 41 à 80 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.

Pour chaque ligne numérotée de 1 à 40, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

- ▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question, *la ligne correspondante doit rester vierge.*
- ▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse : *vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.*
- ▶ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes : *vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et **deux seulement.***
- ▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne : *vous devez alors noircir la case E.*

**Attention, toute réponse fautive peut entraîner pour la question correspondante une pénalité dans la note.**

7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Exemple I : Question 1 :

Pour une mole de gaz réel :

- A)  $\lim_{P \rightarrow 0} (PV) = RT$ , quelle que soit la nature du gaz.
- B)  $PV = RT$  quelles que soient les conditions de pression et température.
- C) Le rapport des chaleurs massiques dépend de l'atomicité.
- D) L'énergie interne ne dépend que de la température.

Exemple II : Question 2 :

Pour un conducteur ohmique de conductivité électrique  $\sigma$ , la forme locale de la loi d'OHM est :

- A)  $j = \frac{E}{\sigma}$
- B)  $j = \sigma E$
- C)  $E = \sigma^2 j$
- D)  $j = \sigma^2 E$

Exemple III : Question 3 :

- A) Le travail lors d'un cycle monotherme peut être négatif.
- B) Une pompe à chaleur prélève de la chaleur à une source chaude et en restitue à la source froide.
- C) Le rendement du cycle de CARNOT est  $1 + \frac{T_2}{T_1}$
- D) Le phénomène de diffusion moléculaire est un phénomène réversible.

Vous marquerez sur la feuille réponse :

1 -  A    B    C    D    E

2 -  A    B    C    D    E

3 -  A    B    C    D    E

## AVERTISSEMENTS

Les calculatrices sont interdites pour cette épreuve. Dans certaines questions, les candidats doivent choisir entre plusieurs valeurs numériques. Les valeurs fausses qui sont proposés ont des ordres de grandeur suffisamment différents de la valeur exacte arrondie selon les règles habituelles, afin d'éliminer toute ambiguïté dans le choix de la bonne réponse.

---

Conformément aux notations internationales, les vecteurs sont représentés en caractères gras, et le produit vectoriel, noté par une croix ( $\times$ ).

---

### QUESTIONS LIÉES

Mécanique des fluides [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]

Électrodynamique [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]

Quantique [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]

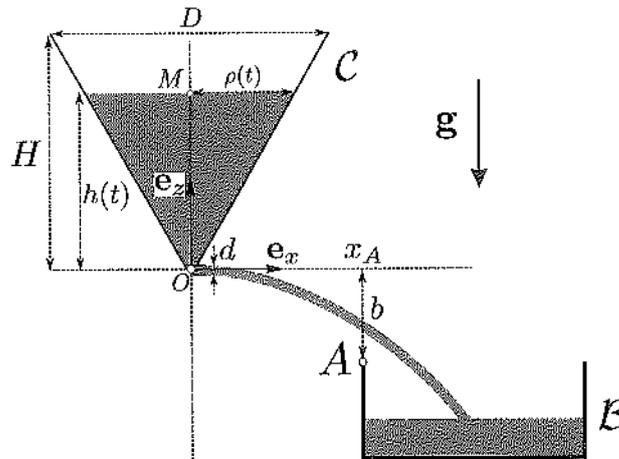
Thermodynamique [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28]

Électromagnétisme [29, 30, 31, 32, 33, 34]

Électronique [35, 36, 37, 38, 39, 40]

## Mécanique des fluides

Le référentiel du laboratoire est muni d'un repère cartésien  $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  dans lequel  $O\mathbf{e}_z$  désigne la verticale ascendante. Un réservoir conique  $\mathcal{C}$ , d'axe de symétrie de révolution vertical  $O\mathbf{e}_z$ , de hauteur  $H$  et de diamètre de base  $D$ , est percé au voisinage de son sommet  $O$  d'un trou de petit diamètre  $d \ll D$  (Fig. ci-après). Le réservoir est entièrement rempli d'eau liquide qui est initialement au repos dans le référentiel du laboratoire que l'on suppose galiléen. On assimilera l'eau à un fluide parfait homogène de masse volumique  $\rho_m$ . À un instant initial ( $t = 0$ ), un robinet, non représenté sur la figure, s'ouvre et l'eau contenue dans  $\mathcal{C}$  commence à s'écouler en  $O$  à travers un petit coude, de diamètre  $d$  et de longueur négligeable, qui expulse l'eau horizontalement avec une vitesse notée  $\mathbf{v}(O, t) = v_O(t) \mathbf{e}_x$ . L'écoulement est supposé parfait. La pression atmosphérique vaut  $p_0$  et on note  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$  le champ de pesanteur d'intensité  $g$ . On désigne par  $h(t)$  la cote d'un point  $M$  de la surface libre du liquide à l'instant  $t$  et  $\rho(t)$  le rayon de cette surface. On néglige le frottement de l'air sur le jet.



1. Exprimer  $v_O(0)$  ainsi que le débit de masse initial  $D_m(0)$ .

A)  $v_O(0) \approx (2gH)^{1/2}$

C)  $D_m(0) \approx \pi \rho_m d^2 (2gH)^{1/2}$

B)  $v_O(0) \approx \left(\frac{2DgH}{d}\right)^{1/2}$

D)  $D_m(0) \approx \pi \rho_m d^2 \left(\frac{gH}{8}\right)^{1/2}$

2. Dans toute la suite, on étudie l'écoulement en supposant  $\rho(t) \gg d$ , c'est-à-dire qu'on ne modélise pas la vidange complète de  $\mathcal{C}$ . À quelle relation conduit la conservation de la masse?

A)  $\frac{dh}{dt} = -\left(\frac{Hd}{hD}\right)^2 v_O(t)$

C)  $\frac{dh}{dt} = -\left(\frac{hd}{HD}\right)^2 v_O(t)$

B)  $\frac{dh}{dt} = -\left(\frac{hD}{Hd}\right)^2 v_O(t)$

D)  $\frac{dh}{dt} = -\left(\frac{HD}{hd}\right)^2 v_O(t)$

3. L'équation différentielle d'évolution de la hauteur d'eau dans  $\mathcal{C}$  est la suivante :

$$h^\alpha \times \frac{dh}{dt} = -K$$

où  $K$  est un coefficient constant au cours du temps et  $\alpha$ , un facteur indépendant du temps. Déterminer  $K$  et  $\alpha$ .

A)  $K = (2g)^{1/2} \left(\frac{HD}{d}\right)^2$

C)  $K = (2g)^{1/2} \left(\frac{Hd}{D}\right)^2$

B)  $\alpha = \frac{3}{2}$

D)  $\alpha = 2$

4. Trouver la durée  $\tau_{1/2}$  nécessaire pour vider le réservoir jusqu'à une hauteur d'eau finale  $H/2$  :

A)  $\tau_{1/2} = \frac{5H^{5/2}}{2K} \left(1 - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)$

C)  $\tau_{1/2} = \frac{H^{5/2}}{K} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

B)  $\tau_{1/2} = \frac{H^{5/2}}{5K} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

D)  $\tau_{1/2} = \frac{2H^{5/2}}{5K} \left(1 - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)$

5. Déterminer  $v_O(\tau_{1/2})$  :

A)  $v_O(\tau_{1/2}) = \left(\frac{gH}{2}\right)^{1/2}$

C)  $v_O(\tau_{1/2}) = (2gd)^{1/2}$

B)  $v_O(\tau_{1/2}) = (gH)^{1/2}$

D)  $v_O(\tau_{1/2}) = \left(\frac{gD}{2}\right)^{1/2}$

6. Un deuxième réservoir  $\mathcal{B}$  est placé à une distance  $b$  en dessous du plan horizontal contenant  $O$  (Fig. précédente). On suppose qu'initialement le jet tombe dans  $\mathcal{B}$ . Le réservoir  $\mathcal{B}$  est placé de telle sorte que son point  $A$  situé à l'extrémité gauche et haute, soit atteint par une particule de fluide ayant en  $O$  la vitesse  $v_O(\tau_{1/2})$ . Déterminer  $x_A$  :

A)  $x_A = \left(\frac{2b}{g}\right)^{1/2} v_O(\tau_{1/2})$

C)  $x_A = \left(\frac{b}{2g}\right)^{1/2} v_O(\tau_{1/2})$

B)  $x_A = \left(\frac{b}{g}\right)^{1/2} v_O(\tau_{1/2})$

D)  $x_A = \left(\frac{b}{4g}\right)^{1/2} v_O(\tau_{1/2})$

7. Le volume  $V_c$  d'un cône de hauteur  $h_c$  et de surface de base  $S_c$  vaut  $V_c = (1/3)h_c S_c$ . Exprimer le volume  $V$  d'eau que  $\mathcal{B}$ , initialement vide, contient lorsque  $\mathcal{C}$  s'est entièrement vidé.

A)  $V = \frac{7\pi}{24} D^2 H$

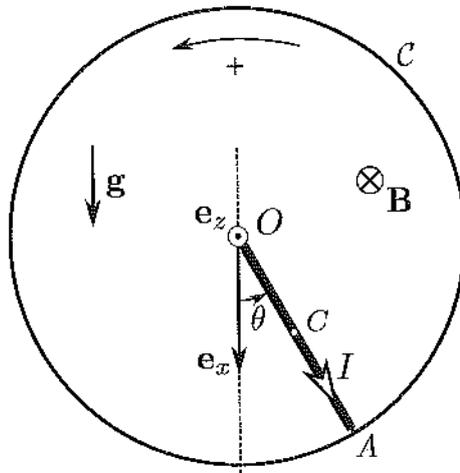
B)  $V = \frac{\pi}{48} D^2 H$

C)  $V = \frac{7\pi}{96} D^2 H$

D)  $V = \frac{5\pi}{48} D^2 H$

## Électrodynamique

On étudie, dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$  muni d'un repère cartésien  $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  où  $O\mathbf{e}_x$  désigne la verticale descendante, un pendule constitué d'une tige conductrice homogène  $OA$ , de longueur  $\ell = OA = 15 \text{ cm}$  et de masse  $m = 10 \text{ g}$ , fixée en  $O$  à une liaison pivot supposée parfaite, d'axe  $O\mathbf{e}_z$ . On repère la position de la tige par l'angle  $\theta$ , orienté dans le sens direct, qu'elle forme avec la verticale descendante. La tige est parcourue par un courant d'intensité  $I$  réglable, constante au cours du temps, imposé par un générateur de courant non représenté sur le schéma. La continuité du circuit est assurée par un cerceau  $\mathcal{C}$  conducteur fixe dans  $\mathcal{R}$ , orthogonal à  $O\mathbf{e}_z$  et de centre  $O$ , en contact avec la tige grâce à un balai situé à son extrémité  $A$ . Le balai glisse sans frotter sur le cerceau. Ce pendule est placé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire  $\mathbf{B} = -B_0\mathbf{e}_z$  où  $B_0 > 0$ . On note  $C$  le milieu du segment  $AO$  (Fig. ci-après). Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe  $O\mathbf{e}_z$  vaut  $m\ell^2/3$ . On note  $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_x$  le champ de pesanteur terrestre, d'intensité  $g \approx 10 \text{ m.s}^{-2}$ .



8. Lorsque  $I = 0$ , exprimer puis calculer numériquement la période  $T_0$  des petites oscillations ( $\theta(t) \ll 1 \text{ rad}$ ).

- A)  $T_0 = 2\pi \left(\frac{2\ell}{3g}\right)^{1/2}$     B)  $T_0 = 2\pi \left(\frac{\ell}{3g}\right)^{1/2}$     C)  $T_0 \approx 0,1 \text{ s}$   
 D)  $T_0 \approx 0,6 \text{ s}$

9. L'intensité du courant dans la tige est désormais non nulle ( $I \neq 0$ ). En quel point s'applique la résultante des forces de Laplace?

- A) En  $O$     C) En  $C$   
 B) En  $A$     D) Au milieu du segment  $[OC]$

10. Exprimer la norme  $\|\mathbf{F}_L\|$  de la résultante des forces de Laplace sur la tige ainsi que le moment scalaire  $M_L$  de cette résultante par rapport à l'axe orienté  $O\mathbf{e}_z$ .

- A)  $\|\mathbf{F}_L\| = IB_0\ell$     B)  $\|\mathbf{F}_L\| = \frac{1}{2}IB_0\ell$     C)  $M_L = \frac{1}{2}IB_0\ell^2$     D)  $M_L = IB_0\ell^2$

11. L'équation du mouvement se met sous la forme suivante :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = \kappa \omega_0^2$$

où  $\omega_0$  et  $\kappa$  sont deux constantes temporelles. Déterminer  $\omega_0$  et  $\kappa$ .

- A)  $\omega_0 = \left(\frac{3g}{2\ell} - \frac{3IB_0}{2m}\right)^{1/2}$     B)  $\omega_0 = \left(\frac{3g}{2\ell}\right)^{1/2}$     C)  $\kappa = \frac{3IB_0\ell}{2mg}$     D)  $\kappa = \frac{IB_0\ell}{mg}$

12. La tige ne possède de position(s) d'équilibre que si  $B_0 < B_M$ . Déterminer  $B_M$  :
- A)  $B_M = \frac{2mg}{I\ell}$       B)  $B_M = \frac{mg}{I\ell}$       C)  $B_M = \frac{3mg}{I\ell}$       D)  $B_M = \frac{3mg}{2I\ell}$
13. On note  $n_e$  le nombre de positions d'équilibre de la tige lorsque  $B_0 < B_M$  et  $n_s$  le nombre de positions stables. Déterminer  $n_e$  et  $n_s$ .
- A)  $n_e = 1$       B)  $n_e = 2$       C)  $n_s = 1$       D)  $n_s = 2$
14. Déterminer la fréquence  $f_0$  des petites oscillations autour de la position (ou des positions) d'équilibre stable.
- A)  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} (\cos \kappa)^{1/2}$       C)  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} [\sin(\arccos \kappa)]^{1/2}$   
 B)  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} (\sin \kappa)^{1/2}$       D)  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} [\cos(\arcsin \kappa)]^{1/2}$

## Quantique

On modélise la molécule organique de buta-1,3-diène comme un système unidimensionnel possédant des électrons (masses  $m_e \approx 10^{-30}$  kg) délocalisés le long de la molécule, de longueur  $L = 0,6$  nm. Ces électrons, sans interaction mutuelle, sont piégés dans un puits de potentiel de profondeur infinie, entre les points d'abscisses 0 et  $L$ . On décrit quantiquement un de ces électrons par une fonction d'onde à une dimension  $\Psi(x, t)$  qui obéit à l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \mathcal{E}_p(x) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$i$  étant l'unité imaginaire ( $i^2 = -1$ ),  $\hbar = h/(2\pi) \approx 10^{-34}$  J.s la constante de Planck réduite,  $\mathcal{E}_p(x)$  l'énergie potentielle de l'électron et  $t$ , le temps.

15. Dans ce puits infini :
- A) La probabilité de présence de l'électron dans les régions  $x < 0$  et  $x > L$  est non nulle.  
 B) Les niveaux d'énergie de l'électron forment un continuum.  
 C) La position et la vitesse de l'électron sont parfaitement déterminées.  
 D) Dans un état stationnaire d'énergie, la probabilité linéique de présence est uniforme.
16. La particule est dans un état stationnaire d'énergie caractérisé par la fonction d'onde  $\Psi_n(x, t) = \psi_n(x) \exp(-i\mathcal{E}_n t/\hbar)$  où  $\mathcal{E}_n$  désigne les niveaux d'énergie possibles de l'électron dans le puits,  $n$  étant un nombre entier non nul. Déterminer  $\mathcal{E}_n$  et  $\mathcal{E}_1$ .
- A)  $\mathcal{E}_n = n\mathcal{E}_1$       B)  $\mathcal{E}_n = n^2\mathcal{E}_1$       C)  $\mathcal{E}_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m_e L^2}$       D)  $\mathcal{E}_1 = \frac{\hbar^2}{2m_e L^2}$
17. Calculer numériquement l'ordre de grandeur de  $\mathcal{E}_1$  en eV. On indique la valeur de la charge élémentaire,  $e \approx 1,6 \times 10^{-19}$  C.
- A)  $\mathcal{E}_1 \approx 1$  eV      C)  $\mathcal{E}_1 \approx 100$  eV  
 B)  $\mathcal{E}_1 \approx 10$  eV      D)  $\mathcal{E}_1 \approx 1$  keV
18. Déterminer la norme  $k_n$  du vecteur d'onde ainsi que  $\psi_n(x)$  normée :
- A)  $k_n = n^2 \frac{2\pi}{L}$       C)  $\psi_n(x) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{1/2} \cos\left(k_n x + \frac{\pi}{2}\right)$   
 B)  $k_n = n \frac{\pi}{L}$       D)  $\psi_n(x) = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin(k_n x)$

19. Que valent les probabilités linéiques  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , respectivement dans les états stationnaires d'énergie  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$ , de détecter l'électron en  $x = L/2$  ?
- A)  $\rho_1 = 0$                       B)  $\rho_1 = \frac{2}{L}$                       C)  $\rho_2 = 0$                       D)  $\rho_2 = \frac{1}{L}$
20. Exprimer la longueur d'onde  $\lambda_{2 \rightarrow 1}$  du rayonnement électromagnétique émis lors de la transition du niveau d'énergie  $\mathcal{E}_2$  vers le niveau fondamental (on note  $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$  la constante d'Einstein ou célérité des ondes électromagnétiques dans le vide).
- A)  $\lambda_{2 \rightarrow 1} = \frac{hc}{\mathcal{E}_1}$                       B)  $\lambda_{2 \rightarrow 1} = \frac{hc}{3\mathcal{E}_1}$                       C)  $\lambda_{2 \rightarrow 1} = \frac{hc}{9\mathcal{E}_1}$                       D)  $\lambda_{2 \rightarrow 1} = \frac{hc}{\mathcal{E}_1}$
21. Dans quel domaine spectral se situe ce rayonnement :
- A) Dans le domaine visible ou proche ultra-violet    C) Dans le domaine radio  
 B) Dans l'infra-rouge lointain                      D) Dans le domaine des rayons X

## Thermodynamique

Une machine thermique fonctionne en cycle fermé au cours duquel  $n = 0,5$  mole d'un gaz supposé parfait subit entre trois états  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  les transformations réversibles suivantes :

$E_1 \rightarrow E_2$  une détente adiabatique ;

$E_2 \rightarrow E_3$  une compression isotherme ;

$E_3 \rightarrow E_1$  un réchauffement isobare.

On désigne par  $p_k$ ,  $V_k$  et  $T_k$  les pressions, volumes et températures des états  $E_k$ , où  $k = 1, 2$  ou  $3$ . La constante des gaz parfaits est  $R \approx 8,3 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$  et  $\gamma = C_{pm}/C_{vm}$  est le rapport de la capacité thermique molaire à pression constante sur la capacité thermique molaire à volume constant. On note respectivement  $Q$  et  $W$  la chaleur (transfert thermique) et le travail (transfert mécanique) reçus par le gaz au cours d'un cycle et  $Q_{ij}$  et  $W_{ij}$  respectivement la chaleur et le travail reçu par le gaz lors de la transformation menant de l'état  $E_i$  à l'état  $E_j$ .

On indique l'expression de l'entropie molaire  $S_m$  d'un gaz parfait de température  $T$  et de volume  $V$  :

$$S_m = C_{vm} \ln T + R \ln V + \text{Cte}$$

où Cte est une constante indépendante des paramètres d'état du gaz.

22. L'état  $E_1$  est caractérisé par  $T_1 = 80^\circ\text{C}$  et  $V_1 = 0,5 \text{ L}$ . Calculer un ordre de grandeur de  $p_1$ .

- A)  $p_1 = 30 \text{ mbars}$                       B)  $p_1 = 3 \text{ bars}$                       C)  $p_1 = 30 \text{ bars}$                       D)  $p_1 = 300 \text{ bars}$

23. Exprimer  $T_2$  :

- A)  $T_2 = \frac{V_1}{V_2} T_1$                       B)  $T_2 = \frac{V_2}{V_1} T_1$                       C)  $T_2 = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma T_1$                       D)  $T_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} T_1$

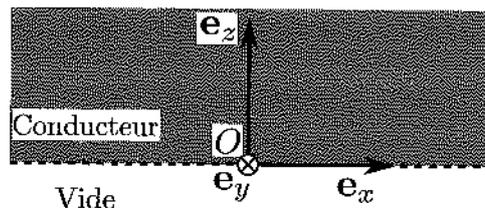
24. Déterminer  $Q_{23}$  et  $Q_{31}$  :

- A)  $Q_{23} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right)$                       C)  $Q_{31} = nC_{pm}(T_1 - T_2)$   
 B)  $Q_{23} = nC_{pm}RT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_3}\right)$                       D)  $Q_{31} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right)$

25. Déterminer les variations d'entropie du gaz  $\Delta S_{31}$  et  $\Delta S_{23}$  respectivement entre les états  $E_3 \rightarrow E_1$  et  $E_2 \rightarrow E_3$ .
- A)  $\Delta S_{31} = nR \ln \left( \frac{V_1}{V_3} \right)$                       C)  $\Delta S_{23} = nR \ln \left( \frac{T_3}{T_2} \right)$   
 B)  $\Delta S_{31} = nC_{pm} \ln \left( \frac{T_1}{T_2} \right)$                       D)  $\Delta S_{23} = nR \ln \left( \frac{V_3}{V_2} \right)$
26. Quels sont les signes de  $Q$  et de  $W$  ?
- A)  $Q > 0$                       B)  $Q < 0$                       C)  $W > 0$                       D)  $W < 0$
27. Que vaut l'efficacité  $\eta$  de la machine, rapport du transfert d'énergie utile, compte tenu de la vocation de la machine, sur le transfert d'énergie nécessaire pour la faire fonctionner :
- A)  $\eta = 1 + \frac{Q_{23}}{Q_{31}}$                       B)  $\eta = 1 + \frac{Q_{31}}{Q_{23}}$                       C)  $\eta = \frac{1}{1 + Q_{31}/Q_{23}}$                       D)  $\eta = \frac{1}{1 + Q_{23}/Q_{31}}$
28. Calculer l'efficacité  $\eta_m$  d'un cycle de Carnot fonctionnant entre les deux températures 175 K et 350 K pour une machine de même vocation.
- A)  $\eta_m = 25\%$                       B)  $\eta_m = 50\%$                       C)  $\eta_m = 75\%$                       D)  $\eta_m = 150\%$

## Électromagnétisme

Une onde électromagnétique plane, progressive, harmonique, se propage dans le vide et tombe sous incidence normale sur un conducteur ohmique de conductivité supposé infinie (l'épaisseur de peau est nulle). Le référentiel du laboratoire est muni d'un repère cartésien  $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ , l'origine  $O$  étant située à la surface du conducteur. Ce dernier occupe le demi-espace  $z > 0$  (Fig. ci-après). On note  $c$  la constante d'Einstein (célérité des ondes électromagnétiques dans le vide) et  $\epsilon_0$  la permittivité du vide. On repère un point  $M$  quelconque de l'espace par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ .



Le vecteur champ électrique de l'onde incidente, en notation complexe  $\underline{\mathbf{E}}_i(M, t)$ , s'écrit au cours du temps  $t$ , dans la base cartésienne :

$$\underline{\mathbf{E}}_i(M, t) = E_0 \exp[-i(\omega t - kz)] \begin{pmatrix} \alpha \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$i$  étant l'unité imaginaire ( $i^2 = -1$ ),  $\alpha > 0$  un facteur réel différent de l'unité,  $E_0$  une constante spatiale et temporelle,  $\omega$  la pulsation et  $k$  la norme du vecteur d'onde.

29. Décrire la polarisation de l'onde électromagnétique incidente.
- A) La polarisation est rectiligne                      C) La polarisation est elliptique  
 B) La polarisation est circulaire                      D) On ne peut pas conclure

30. Que vaut le champ électrique total  $\mathbf{E}(M, t)$  dans la région  $z < 0$  ?

A)

$$\mathbf{E}(M, t) = 2E_0 \cos(kz) \begin{vmatrix} \alpha \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

C)

$$\mathbf{E}(M, t) = 2E_0 \cos(kz) \begin{vmatrix} \alpha \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

B)

$$\mathbf{E}(M, t) = 2E_0 \sin(kz) \begin{vmatrix} \alpha \sin(\omega t) \\ -\cos(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

D)

$$\mathbf{E}(M, t) = 2E_0 \sin(kz) \begin{vmatrix} \alpha \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

31. Déterminer le champ magnétique total  $\mathbf{B}(M, t)$  dans la région  $z < 0$  :

A)

$$\mathbf{B}(M, t) = \frac{2E_0}{c} \cos(kz) \begin{vmatrix} -\sin(\omega t) \\ \alpha \cos(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

C)

$$\mathbf{B}(M, t) = \frac{2E_0}{c} \cos(kz) \begin{vmatrix} \cos(\omega t) \\ \alpha \sin(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

B)

$$\mathbf{B}(M, t) = \frac{2E_0}{c} \sin(kz) \begin{vmatrix} -\cos(\omega t) \\ \alpha \sin(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

D)

$$\mathbf{B}(M, t) = \frac{2E_0}{c} \sin(kz) \begin{vmatrix} -\sin(\omega t) \\ \alpha \cos(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

32. Que vaut le vecteur de Poynting  $\mathbf{R}(M, t)$  dans la région  $z < 0$  ?

A)  $\mathbf{R}(M, t) = \mathbf{0}$

C)  $\mathbf{R}(M, t) = \epsilon_0 c \alpha^2 E_0^2 \sin(2kz) \cos(2\omega t) \mathbf{e}_z$

B)  $\mathbf{R}(M, t) = \epsilon_0 c (\alpha^2 - 1) E_0^2 \cos(2kz) \cos(2\omega t) \mathbf{e}_z$

D)  $\mathbf{R}(M, t) = \epsilon_0 c (\alpha^2 - 1) E_0^2 \sin(2kz) \sin(2\omega t) \mathbf{e}_z$

33. Que vaut la moyenne temporelle  $\overline{\mathbf{R}}(M)$  du vecteur de Poynting (dans le demi-espace  $z < 0$ ) ?

A)  $\overline{\mathbf{R}}(M) = \epsilon_0 c (1 - \alpha^2) E_0^2 \sin(2kz) \mathbf{e}_z$

C)  $\overline{\mathbf{R}}(M) = \mathbf{0}$

B)  $\overline{\mathbf{R}}(M) = \epsilon_0 c (1 - \alpha^2) E_0^2 \mathbf{e}_z$

D)  $\overline{\mathbf{R}}(M) = \epsilon_0 c E_0^2 \mathbf{e}_z$

34. Que vaut la moyenne temporelle  $\overline{w}$  de l'énergie électromagnétique volumique ?

A)  $\overline{w} = \epsilon_0 E_0^2$

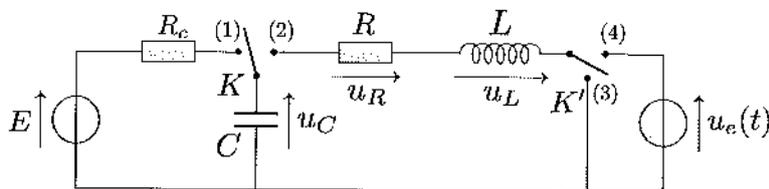
B)  $\overline{w} = \epsilon_0 \alpha^2 E_0^2$

C)  $\overline{w} = 0$

D)  $\overline{w} = \epsilon_0 E_0^2 (1 + \alpha^2)$

## Électronique

Dans le circuit représenté sur la figure ci-après, l'interrupteur  $K$  est en position (2) et  $K'$  en position (3) depuis assez longtemps pour que le régime du circuit soit celui du repos électrique. La source de tension  $E$  est stationnaire tandis que  $u_e(t)$  est une tension sinusoïdale d'amplitude  $u_m$  et de pulsation  $\omega$ .



35. À un instant pris comme origine temporelle,  $K$  bascule en position (1). Comment évolue la tension  $u_C(t)$  :
- A)  $u_C(t) = E \exp\left(-\frac{t}{2R_c C}\right)$       C)  $u_C(t) = E \exp\left(-\frac{t}{R_c C}\right)$   
 B)  $u_C(t) = E \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{2R_c C}\right)\right]$       D)  $u_C(t) = E \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{R_c C}\right)\right]$
36. Une fois atteint le régime établi (parfois appelé, permanent),  $K$  bascule en position (2), à un nouvel instant choisi comme *nouvelle origine temporelle*. Que peut-on affirmer ?
- A)  $u_L(t = 0^+) = -E$     B)  $u_R(t = 0^+) = E$     C)  $u_C(t = \infty) = E$     D)  $u_C(t = \infty) = 0$
37. On note  $Q$  le facteur de qualité du circuit  $RLC$ . Que peut-on affirmer ?
- A) La durée du régime transitoire est la plus brève lorsque  $Q = 2$   
 B) La durée du régime transitoire est la plus brève lorsque  $Q = 1/2$   
 C) Plus  $L$  est élevée, plus le facteur de qualité est petit  
 D) Plus  $C$  est élevée, plus le facteur de qualité est grand
38. Une fois atteint le régime établi (permanent),  $K$  demeurant en position (2), on bascule  $K'$  en position (4) et on attend l'établissement d'un nouveau régime établi (permanent). On réalise des filtres en considérant  $u_e(t)$  comme une tension d'entrée et on prélève une tension de sortie aux bornes des dipôles présents dans le circuit. Que peut-on affirmer ?
- A) Aux bornes du condensateur, le filtre réalisé est un passe-haut.  
 B) Aux bornes du résistor, le filtre réalisé est un passe-bande.  
 C) Aux bornes de la bobine, le filtre réalisé est un passe-bas.  
 D) Aux bornes de l'association série des deux dipôles  $RL$ , le filtre réalisé est un passe-haut.
39. On note  $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$  et on désigne par  $u_{C,m}(\omega)$  et  $u_{R,m}(\omega)$  les amplitudes des tensions aux bornes du condensateur ( $C$ ) et du résistor ( $R$ ), en fonction de  $\omega$ . Que peut-on affirmer ?
- A) Si  $Q < 1/\sqrt{2}$ ,  $u_{C,m}(\omega)$  passe par un maximum lorsqu'on augmente  $\omega$  depuis les très basses fréquences.  
 B) Si  $Q > 1/\sqrt{2}$ ,  $u_{C,m}(\omega)$  passe par un maximum lorsqu'on augmente  $\omega$  depuis les très basses fréquences.  
 C)  $u_{R,m}(\omega)$  passe par un maximum quel que soit  $Q$ .  
 D)  $u_{R,m}(\omega)$  ne passe par un maximum que si  $Q > 1/2$ .
40. Que peut-on affirmer :
- A)  $u_{C,m}(\omega_0) = Qu_m$     B)  $u_{C,m}(\omega_0) = u_m$     C)  $u_{R,m}(\omega_0) = Qu_m$     D)  $u_{R,m}(\omega_0) = u_m$

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

Session 2019

CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT  
D'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE



**ÉPREUVE OBLIGATOIRE A OPTION  
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR**

Durée : 4 heures

Coefficient : 3



Cette épreuve comporte :

- 1 page de garde
- 2 pages de consignes recto-verso pour remplir le QCM
- 1 page d'avertissements
- 31 pages de texte/questions recto-verso (page 1 à 31)
- 5 pages d'annexes recto (page 32 à 36)

**TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT  
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)**

**ÉPREUVE OBLIGATOIRE A OPTION DE  
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR****A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT**

L'épreuve obligatoire à option de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé informatiquement.

- 1) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un stylo à encre foncée : bleue ou noire et à bille ou feutre. Vous devez **cocher ou noircir** complètement la case en vue de la lecture informatisée de votre QCM.
- 2) Utilisez le sujet comme brouillon (ou les feuilles de brouillons qui vous sont fournies à la demande par la surveillante qui s'occupe de votre rangée) et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.
- 3) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté informatiquement et de ne pas être corrigé.
- 4) Si vous voulez corriger votre réponse, **n'utilisez pas de correcteur** mais indiquez la nouvelle réponse sur la ligne de repentir.
- 5) Cette épreuve comporte 50 questions obligatoires, **certaines, de numéros consécutifs, peuvent être liées. La liste de ces questions est donnée sur la page d'avertissements.**

**Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.**

- 6) A chaque question numérotée entre 1 et 50, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 51 à 80 seront neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.

Pour chaque ligne numérotée de 1 à 40, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

- ▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question, *la ligne correspondante doit rester vierge.*
- ▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse : *vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.*
- ▶ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes : *vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et deux seulement.*
- ▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne : *vous devez alors noircir la case E.*

**Attention, toute réponse fausse peut entraîner pour la question correspondante une pénalité dans la note.**

7) EXEMPLES DE REPONSES

Question 1. Le torseur cinématique du solide  $S$  en mouvement par rapport à un référentiel  $R_0$  en un point  $A$  est noté  $\{V_{S/R_0}\}_A = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{S/R_0} \\ \vec{V}_{A,S/R_0} \end{matrix} \right\}$ . A partir de la formule de changement de point, indiquer l'expression du vecteur vitesse  $\vec{V}_{B,S/R_0}$ .

A)	B)	C)	D)
$\vec{V}_{A,S/R_0} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{S/R_0}$	$\vec{V}_{A,S/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{BA}$	$\vec{V}_{A,S/R_0} + \vec{BA} \cdot \vec{\Omega}_{S/R_0}$	$\vec{V}_{A,S/R_0} + \vec{OB} \wedge \vec{\Omega}_{S/R_0}$

Question 2. Soit  $f$  la fonction logique, de représentation algébrique :  $f = a \cdot b \cdot \bar{c}$ . Déterminer le complément de  $f$ .

A)	B)	C)	D)
$\bar{f} = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c$	$\bar{f} = a + b + \bar{c}$	$\bar{f} = \bar{a} \cdot \bar{b} + c$	$\bar{f} = a + \bar{b} + c$

Vous marquerez sur la feuille réponse :

	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
1 -	A	B	C	D	E
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
2 -	A	B	C	D	E
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**AVERTISSEMENTS**

Les calculatrices sont interdites pour cette épreuve. Dans certaines questions, les candidats doivent choisir entre plusieurs valeurs numériques. Les valeurs fausses qui sont proposées ont des ordres de grandeur suffisamment différents de la valeur exacte arrondie selon les règles habituelles, afin d'éliminer toute ambiguïté dans le choix de la bonne réponse.

**Exemple :**

Le calcul sera arrondi au plus proche :  $11,56 \text{ kg} \approx 12 \text{ kg}$

Les propositions de réponse sont :

A)	B)	C)	D)
2 kg	12 kg	18 kg	24 kg

**QUESTIONS LIÉES****Partie A :**

6 à 9

**Partie B :**

15, 17

**Partie C :**23, 24  
25 à 30**Partie D :**37,39,40  
46, 47**FIN DES CONSIGNES**



# OMNIROB

## LE ROBOT COLLABORATIF DE L'USINE DU FUTUR D'AIRBUS

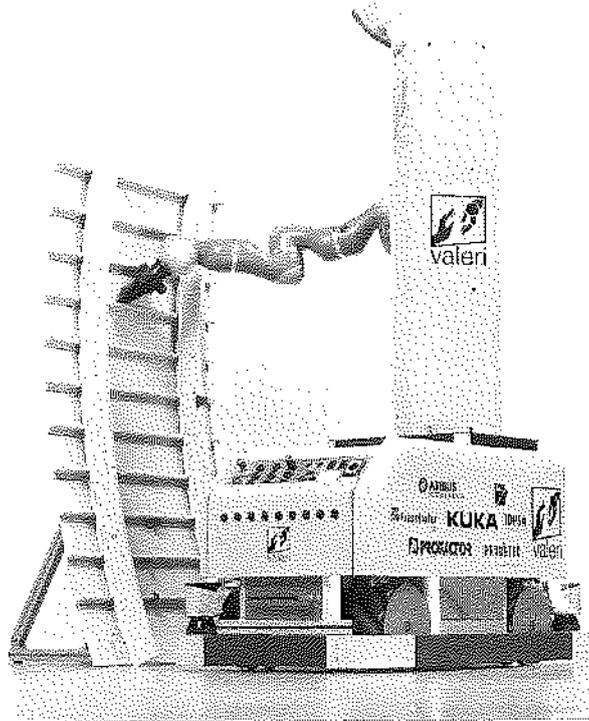


Figure 1 Omnirob, la robotique collaborative au service de l'industrie aéronautique © VALERI

Le projet européen VALERI « Validation of Advanced, Collaborative Robotics for Industrial Applications » coordonné par l'Institut Fraunhofer, a permis de produire un robot collaboratif mobile, autonome et capable de se déplacer seul dans une salle de production : baptisé Omnirob qui signifie robot omnidirectionnel (voir Figure 1).

Airbus Defense Space est partie prenante de ce projet afin d'intégrer davantage de robots sur ses lignes d'assemblage pour venir assister les ingénieurs et techniciens pour certaines tâches monotones et stressantes telles que les missions d'inspection.

Développé en partenariat avec Kuka, OmniRob prend la forme d'un bras robotisé placé sur une plateforme roulante. Contrairement aux robots stationnaires utilisés en production classique (par exemple dans l'industrie automobile), les robots utilisés pour l'aéronautique doivent être mobiles pour répondre aux contraintes liées à la taille d'un avion.

## PRESENTATION DU ROBOT

Omnirob est un robot omnidirectionnel de 12 degrés de liberté (voir Figure 2) qui aura pour mission de réduire le long processus d'assemblage en aidant les travailleurs humains à appliquer des matériaux d'étanchéité le long des encoches d'assemblage (éclisses par exemple) et également en inspectant à l'aide d'une caméra la qualité du joint d'étanchéité réalisé. Ainsi, c'est le robot qui se déplace jusqu'à l'endroit souhaité de la pièce et non l'inverse.

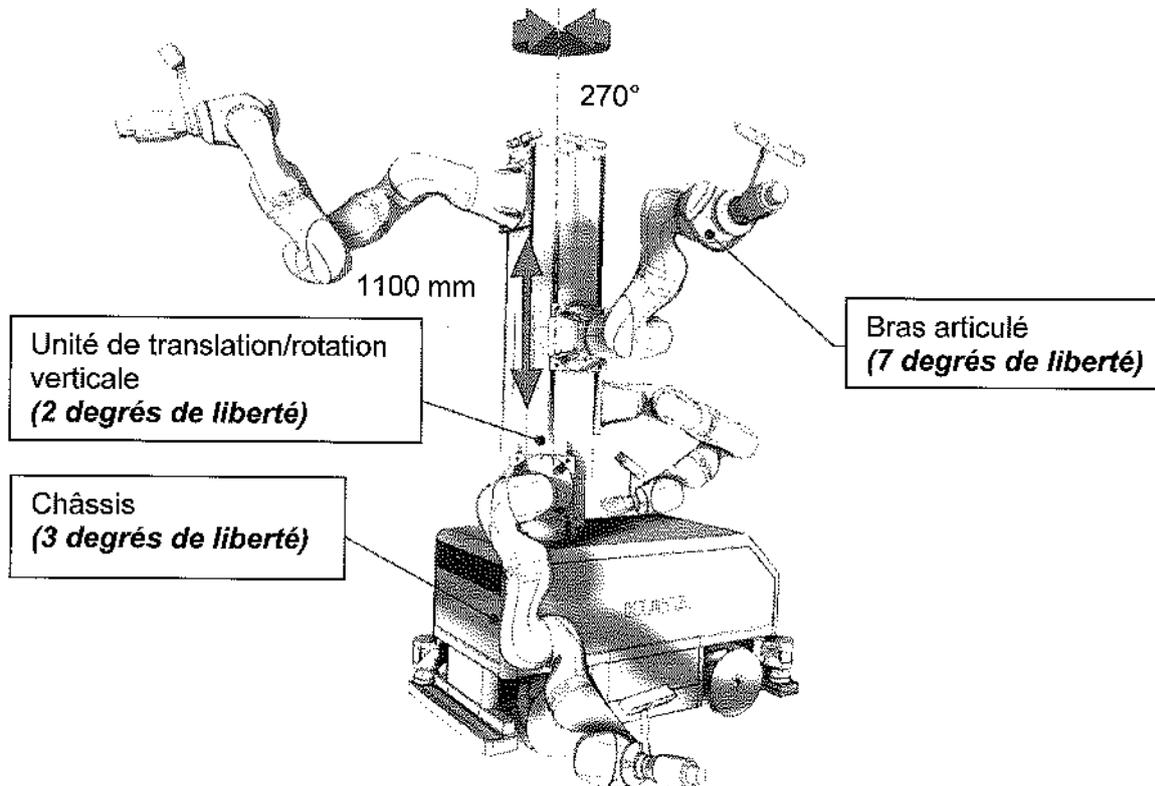


Figure 2 Les 12 degrés de liberté du robot Omnirob

### I DESCRIPTION STRUCTURELLE

Omnirob est constitué d'un châssis à déplacement omnidirectionnel qui accueille un bras robotisé placé sur une unité linéaire de translation et de rotation d'axe vertical, un PC industriel et une batterie.

Le châssis long de 1250 mm, large de 860 mm et haut de 620 mm, se déplace sur quatre roues holonomes de type Mecanum®. Le châssis est ainsi en mesure d'effectuer des mouvements omnidirectionnels, y compris des déplacements latéraux et diagonaux soit 3 degrés de liberté.

Un bras d'environ 1200 mm de long composé de 7 articulations motorisées (soit 7 degrés de liberté) est fixé sur un axe de translation vertical qui est lui-même mue en rotation autour d'un axe vertical avec le châssis.

Cette unité de translation/rotation rajoute 2 degrés de liberté (une translation verticale maximale de 1100 mm et une rotation d'axe vertical de 270° maximum) permettant ainsi d'augmenter l'espace de travail du bras (voir Figure 2 et Figure 3).

L'extrémité du bras peut être équipée d'un pistolet de scellement et/ou d'une caméra d'inspection.

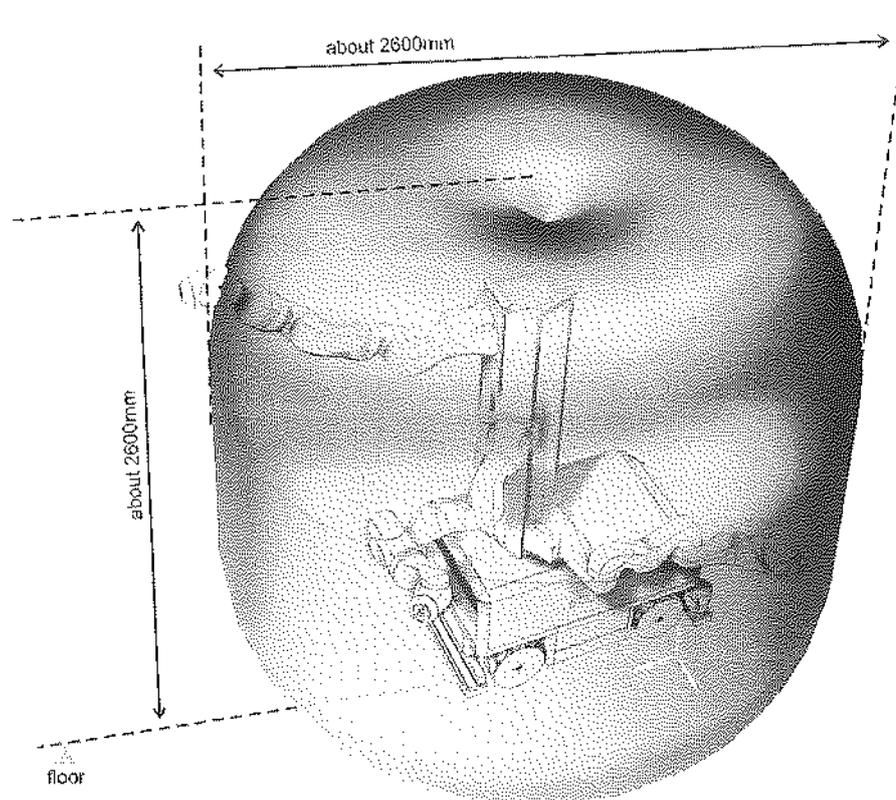


Figure 3 Espace de travail du robot

## II PROBLEMATIQUE ET PLAN DE L'ETUDE

Le sujet porte sur l'analyse de la **cinématique du châssis du robot** équipé de quatre roues holônomes ainsi que sur l'**unité de translation verticale** (voir Figure 2).

**Le sujet comporte 4 parties :**

Pour commencer, la **partie A** indépendante du reste de l'étude, se propose de mettre en place le modèle cinématique direct et inverse du châssis du robot Omnirob. Cette étude permettra de valider les séquences de commande des quatre moteurs (un pour chaque roue) afin d'assurer un déplacement omnidirectionnel. Une analyse des limites du modèle cinématique vis-à-vis des hypothèses formulées sera absorbée.

La **partie B** s'intéresse à l'analyse du mécanisme de translation de l'unité de translation verticale (dite axe Z par la suite) du bras du robot. Une pré-étude sera mise en place pour estimer, en fonction des objectifs de déplacements, les accélérations (motrice ou de freinage) à ne pas dépasser pour garantir la stabilité du robot.

La **partie C** porte sur le dimensionnement de la motorisation de l'axe Z. A partir d'une pré-sélection d'un réducteur planétaire, d'une étude du couple moteur nécessaire pour la charge seule, nous proposerons une sélection d'un moteur synchrone autopiloté (MSAP) également dit moteur brushless alternatif.

La **partie D** se propose d'établir les lois de commandes en courant de la motorisation puis d'implanter un asservissement en vitesse de rotation de la motorisation pour le contrôle du mouvement de l'axe Z.

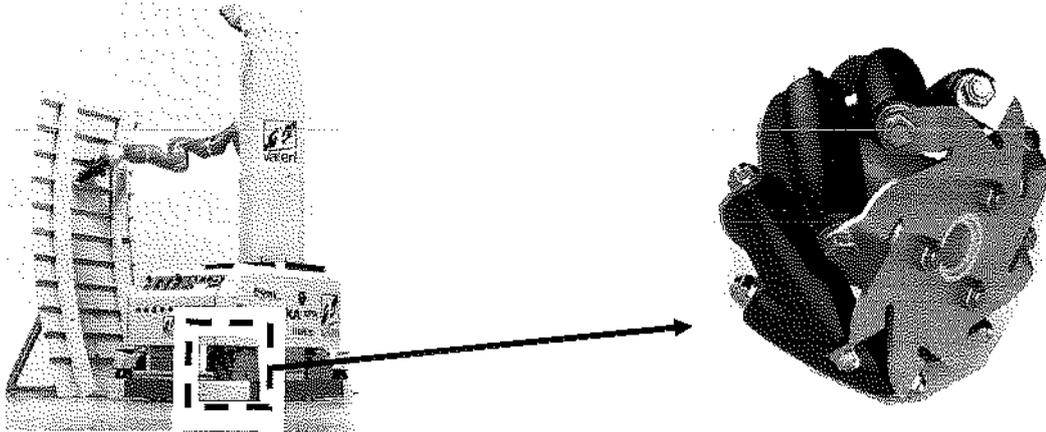
Tournez la page S.V.P.

**I    ETUDE CINEMATIQUE DU ROBOT**

— Objectif —

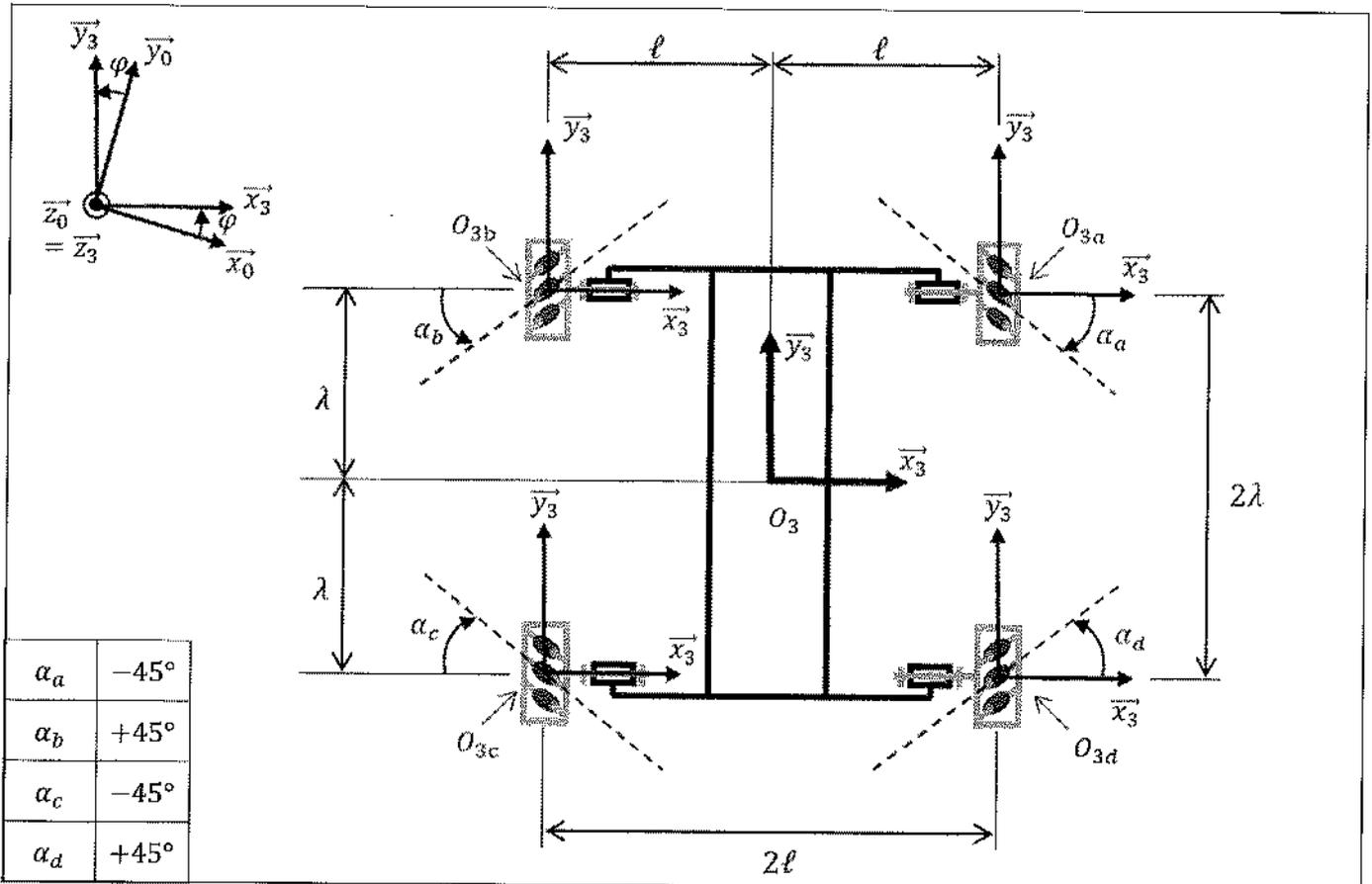
Déterminer le modèle cinématique direct et inverse de la commande du robot Omnirob  
 Valider le critère de mobilité omnidirectionnelle et analyser les limites du modèle

Les roues utilisées pour le robot Omnirob sont des roues holonomes également appelées Mecanum® (voir Figure 4) qui sont mises en mouvement par quatre moteurs commandés indépendamment. La surface de roulement de ces roues spéciales est pourvue de rouleaux ellipsoïdes répartis sur la circonférence à un angle de 45°.



**Figure 4** Détail d'une roue holônome (Mecanum®)

Les figures 5 à 8 posent le paramétrage adopté pour l'étude cinématique.



**Figure 5** Schéma cinématique plan du robot – Paramétrages repères robot et repère global

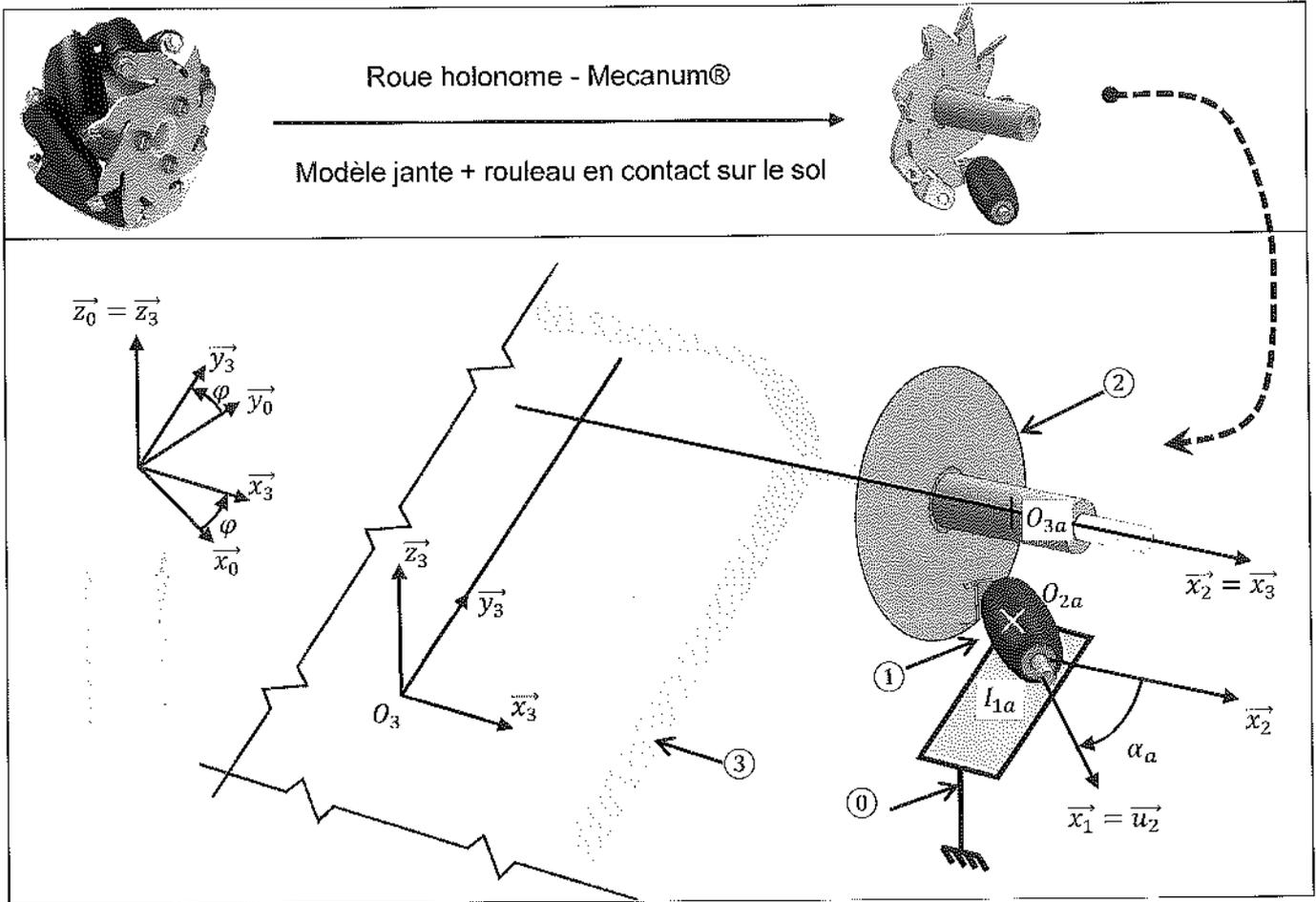


Figure 6 Schéma cinématique 3D de principe du robot – Représentation partielle du châssis 3 avec la roue a

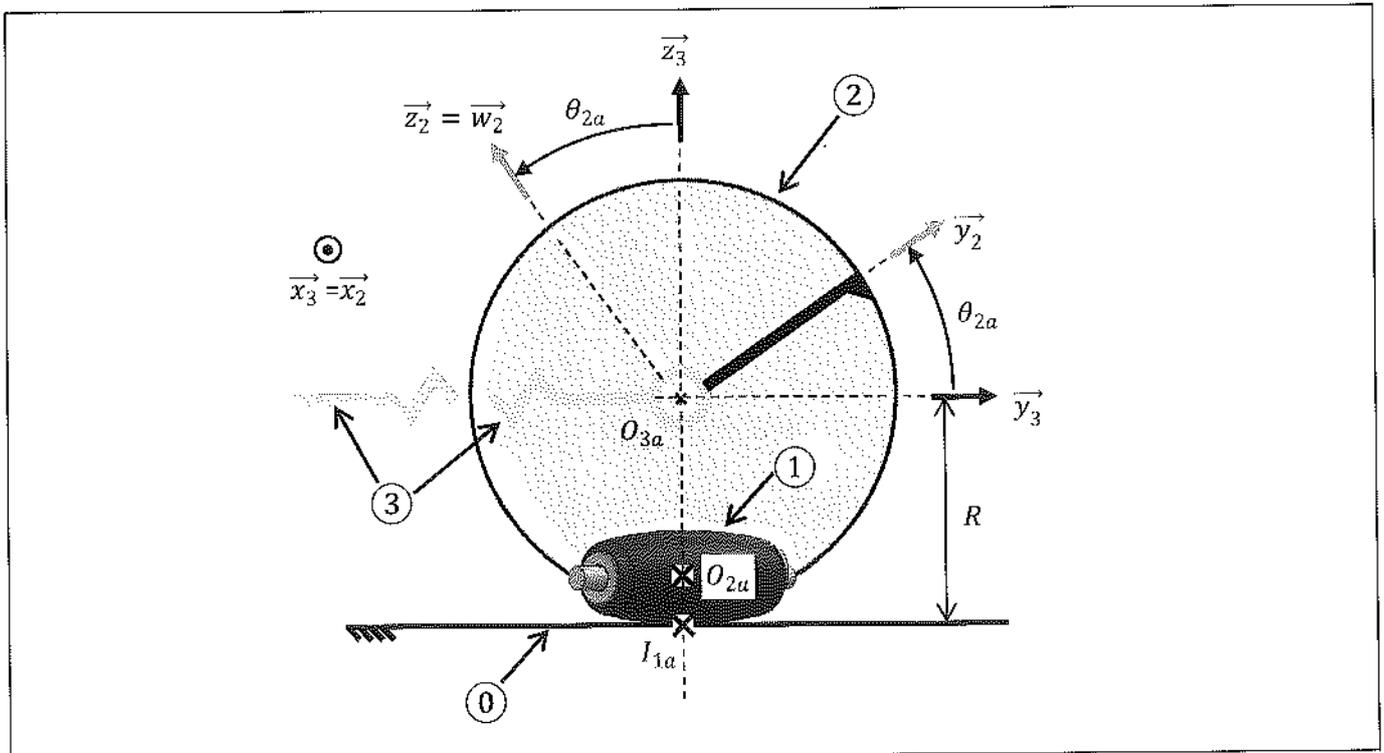


Figure 7 Schéma cinématique de la roue a dans le plan vertical contenant l'axe de la jante 2 soit  $(O_{3a}, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

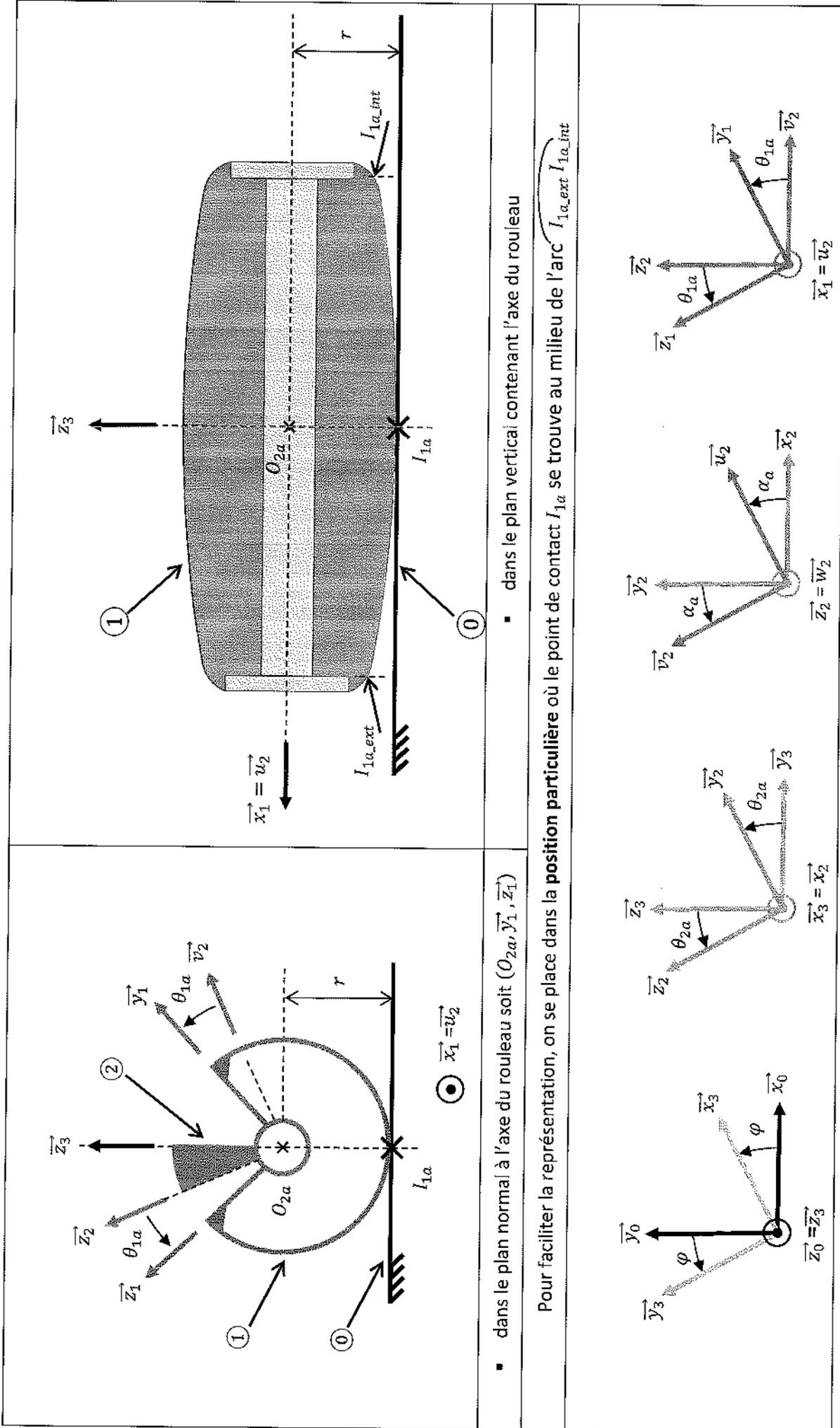
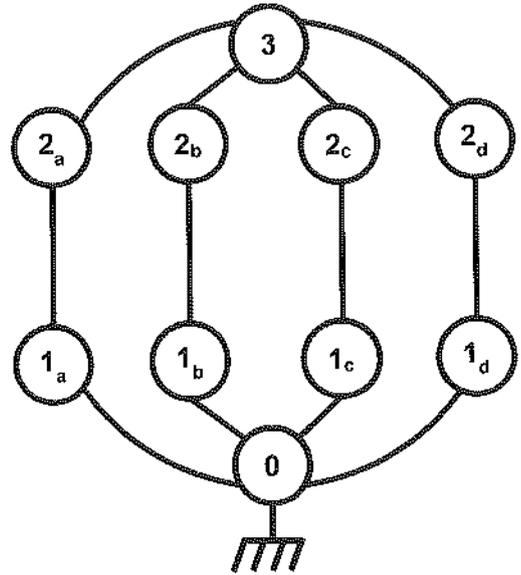


Figure 8 Schéma cinématique partiel du rouleau 1 seul de la roue a dans la **position particulière** où  $I_{1a}$  se trouve au milieu de l'arc  $I_{1a,ext} I_{1a,int}$

Le graphe des liaisons incomplet du châssis du robot avec le sol est donné ci-après.



**Question 1.** En analysant la géométrie de contact entre les rouleaux et le sol, proposer la liaison équivalente entre le châssis 3 et le sol.

A)	B)	C)	D)
Linéique rectiligne de droite de contact $(I_{1a}, \vec{x}_1)$ et de normale $\vec{z}_3$	Ponctuelle en $O_3$ de normale $\vec{z}_3$	Liaison non normalisée	Appui plan de normale $\vec{z}_3$

Hypothèses :

- Les roues sont parfaitement symétriques par rapport aux plans  $(O_3, \vec{x}_3, \vec{z}_3)$  et  $(O_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ .
- Les roues roulent sans glisser sur le sol.

Données :

- Le nombre de rouleaux 1 par roue est  $n=8$ .
- Les rouleaux sont inclinés d'un angle  $\alpha_a = -45^\circ$  par rapport à l'axe de rotation de la roue.

Notations : torseurs cinématiques

- Le torseur cinématique de 3/0 pourra s'exprimer dans la base locale du robot  $b_3 = (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  avec les notations  $\{V_{3/0}\}_{O_3} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{3/0} \\ V_{O_3,3/0} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi} \cdot \vec{z}_3 = \omega \cdot \vec{z}_3 \\ V_{RX} \cdot \vec{x}_3 + V_{RY} \cdot \vec{y}_3 \end{array} \right\}_{O_3}$

Dans le mouvement de rotation de la roue a, le rouleau 1 reste en contact avec le sol suivant la corde  $\overbrace{I_{1a\_ext} I_{1a\_int}}$ , voir Figure 8.

On peut alors démontrer que la fluctuation du rayon  $r$  de l'ellipsoïde est telle que :

$$\Delta r_{\%} = \left( \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} \right) \sin \alpha_a \quad \left| \quad n \text{ étant le nombre de rouleaux} \right.$$

Pour les roues de cette étude,  $\alpha_a = -45^\circ$  et  $n = 8$  rouleaux, on obtient une fluctuation de rayon de 14% lorsque le point de contact  $I_{1a}$  se déplace le long de la corde du rouleau 1. On supposera donc le rayon  $r$  comme étant constant.

Tournez la page S.V.P.

**Question 2.** Déterminer  $\overrightarrow{V_{I_{1a},1/2}}$  en fonction du paramétrage du robot et dans la base  $b_3$ .

**A)**

$$\overrightarrow{V_{I_{1a},1/2}} = r\dot{\theta}_{1a} \begin{pmatrix} -\cos \theta_{2a} \times \sin \alpha_a \\ \cos \alpha_a \\ 0 \end{pmatrix}_{b_3}$$

**B)**

$$\overrightarrow{V_{I_{1a},1/2}} = r\dot{\theta}_{1a} \begin{pmatrix} -\sin \alpha_a \\ \cos \alpha_a \times \cos \theta_{2a} \\ 0 \end{pmatrix}_{b_3}$$

**C)**

$$\overrightarrow{V_{I_{1a},1/2}} = r\dot{\theta}_{1a} \times \cos \theta_{2a} \begin{pmatrix} -\sin \alpha_a \\ \cos \alpha_a \\ 0 \end{pmatrix}_{b_3}$$

**D)**

$$\overrightarrow{V_{I_{1a},1/2}} = r\dot{\theta}_{1a} \times \cos \theta_{2a} \begin{pmatrix} -\sin \alpha_a \\ \cos \alpha_a \\ \tan \theta_{2a} \times \sin \alpha_a \end{pmatrix}_{b_3}$$

On constate que la variation d'angle  $\theta_{2a}$  lors du contact d'un rouleau avec le sol reste faible,  $\theta_{2a} \ll 1$ . Ainsi, en effectuant un développement limité à l'ordre 1 du  $\cos \theta_{2a}$ , on gardera pour la suite du sujet une expression de la vitesse  $\overrightarrow{V_{I_{1a},1/2}} = r \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\theta}_{1a} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{b_3}$ .

**Question 3.** En vous aidant de la Figure 7, déterminer  $\overrightarrow{V_{I_{1a},2/3}}$  en fonction du paramétrage du robot.

A)	B)	C)	D)
$\overrightarrow{V_{I_{1a},2/3}} = R\dot{\theta}_{2a} \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{x}_3 + \vec{y}_3)$	$\overrightarrow{V_{I_{1a},2/3}} = R\dot{\theta}_{2a} \vec{v}_2$	$\overrightarrow{V_{I_{1a},2/3}} = R\dot{\theta}_{2a} \vec{y}_3$	$\overrightarrow{V_{I_{1a},2/3}} = (R - r)\dot{\theta}_{2a} \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{y}_3$

**Question 4.** En vous aidant de la Figure 5, déterminer  $\overrightarrow{V_{I_{1a},3/0}}$  en fonction du paramétrage du robot et des notations du torseur cinématique  $\{V_{3/0}\}_{O_3}$  proposées.

**A)**

$$\overrightarrow{V_{I_{1a},3/0}} = \begin{pmatrix} V_{RX} + \lambda \dot{\varphi} \cos \varphi \\ V_{RY} - \ell \dot{\varphi} \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{b_3}$$

**B)**

$$\overrightarrow{V_{I_{1a},3/0}} = \begin{pmatrix} -V_{RX} - \lambda \dot{\varphi} \\ -V_{RY} + \ell \dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}_{b_3}$$

**C)**

$$\overrightarrow{V_{I_{1a},3/0}} = \begin{pmatrix} -V_{RX} + \lambda \dot{\varphi} \\ -V_{RY} - \ell \dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}_{b_3}$$

**D)**

$$\overrightarrow{V_{I_{1a},3/0}} = \begin{pmatrix} V_{RX} - \lambda \dot{\varphi} \\ V_{RY} + \ell \dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}_{b_3}$$

Afin d'établir le modèle cinématique direct du robot, on introduit une notation classique en robotique avec les vecteurs suivants :

- $\dot{\mathbf{q}}_k$  étant le vecteur des vitesses articulaires des roues  $k = a, b, c$  et  $d$  tel que  $\dot{\mathbf{q}}_k = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{2k} \\ \dot{\theta}_{1k} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{2k} \\ \omega_{1k} \\ \omega \end{pmatrix}$

On aura par exemple pour la roue  $a$ , le vecteur  $\dot{\mathbf{q}}_a = \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{1a} \\ \omega \end{pmatrix}$

- $\dot{\mathbf{q}}$  étant le vecteur des vitesses articulaires pilotées donc les vitesses des 4 moteurs des roues  $a, b, c$  et  $d$  tel que  $\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{2b} \\ \omega_{2c} \\ \omega_{2d} \end{pmatrix}$

- $\dot{X}_R$  étant le vecteur des vitesses opérationnelles du robot tel que  $\dot{X}_R = \begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix}$  exprimé dans la base locale  $b_3$  du robot.

Dans un premier temps nous allons chercher les relations entre  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$  pour  $k = a, b, c$  et  $d$ .

**Question 5.** A partir des questions 2 à 4, déduire de la condition de roulement sans glissement du rouleur 1 par rapport au sol 0 la relation  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_a)$  pour la roue a. On utilisera les notations proposées et on rappelle que l'on note  $\omega = \dot{\phi}$ .

A)
$\begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & -r \frac{\sqrt{2}}{2} & \ell \\ r \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{1a} \\ \omega \end{pmatrix}$

B)
$\begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \lambda \\ -R & -r \frac{\sqrt{2}}{2} & -\ell \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{1a} \\ \omega \end{pmatrix}$

C)
$\begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -r \frac{\sqrt{2}}{2} & \lambda \\ -R & -r \frac{\sqrt{2}}{2} & -\ell \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{1a} \\ \omega \end{pmatrix}$

D)
$\begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \frac{\sqrt{2}}{2} & R & -\lambda \\ 0 & r \frac{\sqrt{2}}{2} & \ell \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{1a} \\ \omega \end{pmatrix}$

La relation précédente pourra se noter  $\dot{X}_R = \begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix} = [J_a] \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{1a} \\ \omega \end{pmatrix}$  avec  $[J_a]$  la matrice jacobienne relative à la roue a.

De façon analogue (en prenant  $\lambda$  ou  $-\lambda$  et  $\ell$  ou  $-\ell$ ) on trouve rapidement les matrices jacobienne relatives aux roues b, c et d.

$\dot{X}_R$  étant unique on peut obtenir 4 équations faisant intervenir uniquement les 4 inconnues articulaires  $\omega_{2a}, \omega_{2b}, \omega_{2c}$  et  $\omega_{2d}$  que l'on souhaite déterminer.

En effet, pour chaque relation  $\dot{X}_R = f(\dot{q}_k)$  on peut écrire pour :

▪ La roue a :  $V_{RX} - V_{RY} = R\omega_{2a} + (\lambda + \ell)\omega$  [Eq1]

▪ La roue b :  $V_{RX} + V_{RY} = -R\omega_{2b} + (\lambda + \ell)\omega$  [Eq2]

▪ La roue c :  $V_{RX} - V_{RY} = R\omega_{2c} - (\lambda + \ell)\omega$  [Eq3]

▪ La roue d :  $V_{RX} + V_{RY} = -R\omega_{2d} - (\lambda + \ell)\omega$  [Eq4]

Trouver le modèle cinématique direct (MCD) revient à obtenir  $\dot{X}_R = f(\dot{q})$ . Ainsi, on remarquera que les coordonnées de  $\dot{X}_R$  se déduisent facilement en utilisant les simplifications issues des 3 combinaisons :

- [Eq1] + [Eq2] + [Eq3] + [Eq4]
- [Eq2] - [Eq1] + [Eq4] - [Eq3]
- [Eq1] + [Eq2] - [Eq3] - [Eq4].

**Question 6.** Dédurre de ces 3 simplifications, le modèle cinématique direct (MCD) du robot,  $\dot{X}_R = f(\dot{q})$ .

**A)**

$$\begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{R}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda + \ell & 0 & \lambda + \ell & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{2b} \\ \omega_{2c} \\ \omega_{2d} \end{pmatrix}$$

**B)**

$$\begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{R}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ \lambda + \ell & \lambda + \ell & \lambda + \ell & \lambda + \ell \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{2b} \\ \omega_{2c} \\ \omega_{2d} \end{pmatrix}$$

**C)**

$$\begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{R}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda + \ell & 0 & \lambda + \ell \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{2b} \\ \omega_{2c} \\ \omega_{2d} \end{pmatrix}$$

**D)**

$$\begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{R}{4} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ \lambda + \ell & 0 & 0 & \lambda + \ell \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{2b} \\ \omega_{2c} \\ \omega_{2d} \end{pmatrix}$$

**Question 7.** Dédurre également à l'aide des équations [Eq1], [Eq2], [Eq3] et [Eq4], le modèle cinématique inverse (MCI) du robot,  $\dot{q} = f(\dot{X}_R)$ .

**A)**

$$\begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{2b} \\ \omega_{2c} \\ \omega_{2d} \end{pmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -(\lambda + \ell) \\ -1 & -1 & (\lambda + \ell) \\ 1 & -1 & (\lambda + \ell) \\ -1 & -1 & -(\lambda + \ell) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix}$$

**B)**

$$\begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{2b} \\ \omega_{2c} \\ \omega_{2d} \end{pmatrix} = \frac{2}{R} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 1 & -1 & \ell \\ -1 & 0 & \lambda \\ 1 & -1 & -\ell \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix}$$

**C)**

$$\begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{2b} \\ \omega_{2c} \\ \omega_{2d} \end{pmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2(\lambda + \ell) \\ 0 & -1 & -2(\lambda + \ell) \\ 1 & 0 & -2(\lambda + \ell) \\ -1 & -1 & 2(\lambda + \ell) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix}$$

**D)**

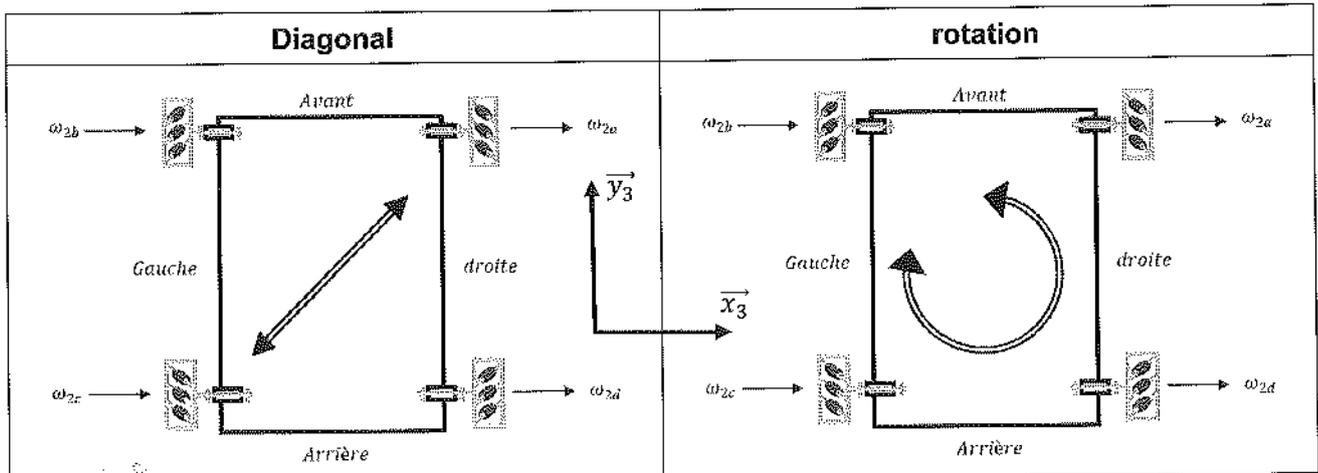
$$\begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{2b} \\ \omega_{2c} \\ \omega_{2d} \end{pmatrix} = \frac{2}{R} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\ell \\ -1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & \ell \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix}$$

Le contrôle du robot peut également être envisagé dans l'espace de travail lié au bâti à savoir le système de coordonnées du repère global.

En notant  $\{V_{3/0}\}_{O_3} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{3/0} \\ V_{O_3,3/0} \end{matrix} \right\}_{O_3} = \left\{ \begin{matrix} \phi \cdot \vec{z}_0 = \omega \cdot \vec{z}_0 \\ V_X \cdot \vec{x}_0 + V_Y \cdot \vec{y}_0 \end{matrix} \right\}_{O_3}$  le torseur cinématique de 3/0 dans la base globale  $b_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , le changement de base étant une rotation d'un angle  $\varphi$  selon  $\vec{z}_0$ , il vient immédiatement :

$$\begin{pmatrix} V_{RX} \\ V_{RY} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_X \\ V_Y \\ \omega \end{pmatrix}$$

**Question 8.** A partir des résultats précédents, indiquer comment commander la vitesse de rotation des moteurs des 4 roues a, b, c et d pour que le robot se déplace suivant une direction diagonale puis tourne sur lui-même,  $\omega_m$  est une vitesse de rotation algébrique.



A)	$\dot{q}_{diagonal} = \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{2b} \\ \omega_{2c} \\ \omega_{2d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_m \\ \omega_m \\ \omega_m \\ \omega_m \end{pmatrix}$	$\dot{q}_{rotation} = \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{2b} \\ \omega_{2c} \\ \omega_{2d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_m \\ -\omega_m \\ -\omega_m \\ \omega_m \end{pmatrix}$
B)	$\dot{q}_{diagonal} = \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{2b} \\ \omega_{2c} \\ \omega_{2d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_m \\ \omega_m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\dot{q}_{rotation} = \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{2b} \\ \omega_{2c} \\ \omega_{2d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\omega_m \\ 2\omega_m \\ 0 \end{pmatrix}$
C)	$\dot{q}_{diagonal} = \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{2b} \\ \omega_{2c} \\ \omega_{2d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_m \\ 0 \\ \omega_m \end{pmatrix}$	$\dot{q}_{rotation} = \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{2b} \\ \omega_{2c} \\ \omega_{2d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_m \\ \omega_m \\ \omega_m \\ -\omega_m \end{pmatrix}$
D)	$\dot{q}_{diagonal} = \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{2b} \\ \omega_{2c} \\ \omega_{2d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_m \\ 0 \\ -\omega_m \\ 0 \end{pmatrix}$	$\dot{q}_{rotation} = \begin{pmatrix} \omega_{2a} \\ \omega_{2b} \\ \omega_{2c} \\ \omega_{2d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\omega_m \\ 0 \\ 0 \\ 2\omega_m \end{pmatrix}$

**Question 9.** Conclure sur le comportement omnidirectionnel du robot et discuter des limites possibles.

**A)**

Les phénomènes de glissement parasites très importants sont présents uniquement en déplacement avant-arrière, ce qui exclut une application possible pour l'industrie automobile classique.

**B)**

La variation du rayon du rouleau est sans incidence sur la vitesse de glissement car le rouleau est libre (montage « fou »). Le nombre important de rouleaux ainsi qu'une compensation par symétrie des variations de vitesse permet de négliger le glissement à l'extérieur des roues.

**C)**

Le déplacement du robot est quasi omnidirectionnel car la variation du rayon du galet modifie la vitesse.

**D)**

Le modèle cinématique inverse démontre le caractère omnidirectionnel du robot.

La fluctuation de la direction de la vitesse  $\vec{V}_{I_{1a},1/2}$  est compensée si les roues sont symétriques. Si ce n'est pas le cas la condition de roulement sans glissement ne peut être vérifiée que pour une marche avant-arrière.

Tournez la page S.V.P.

I MODÈLE CINÉMATIQUE DE L'AXE DE TRANSLATION VERTICAL Z

Objectifs

Le bras du robot équipé de son chargement utile (pistolet de scellement et/ou d'une caméra d'inspection) impose des sollicitations mécaniques importantes au niveau du guidage de l'axe de translation vertical Z. Nous montrerons dans un premier temps, que le choix du montage conduit à un mécanisme hyperstatique.

Pendant, pour assurer une mise en position du bras du robot précise, nous analyserons dans un second temps des solutions pour réduire ou annuler cet hyperstatisme.

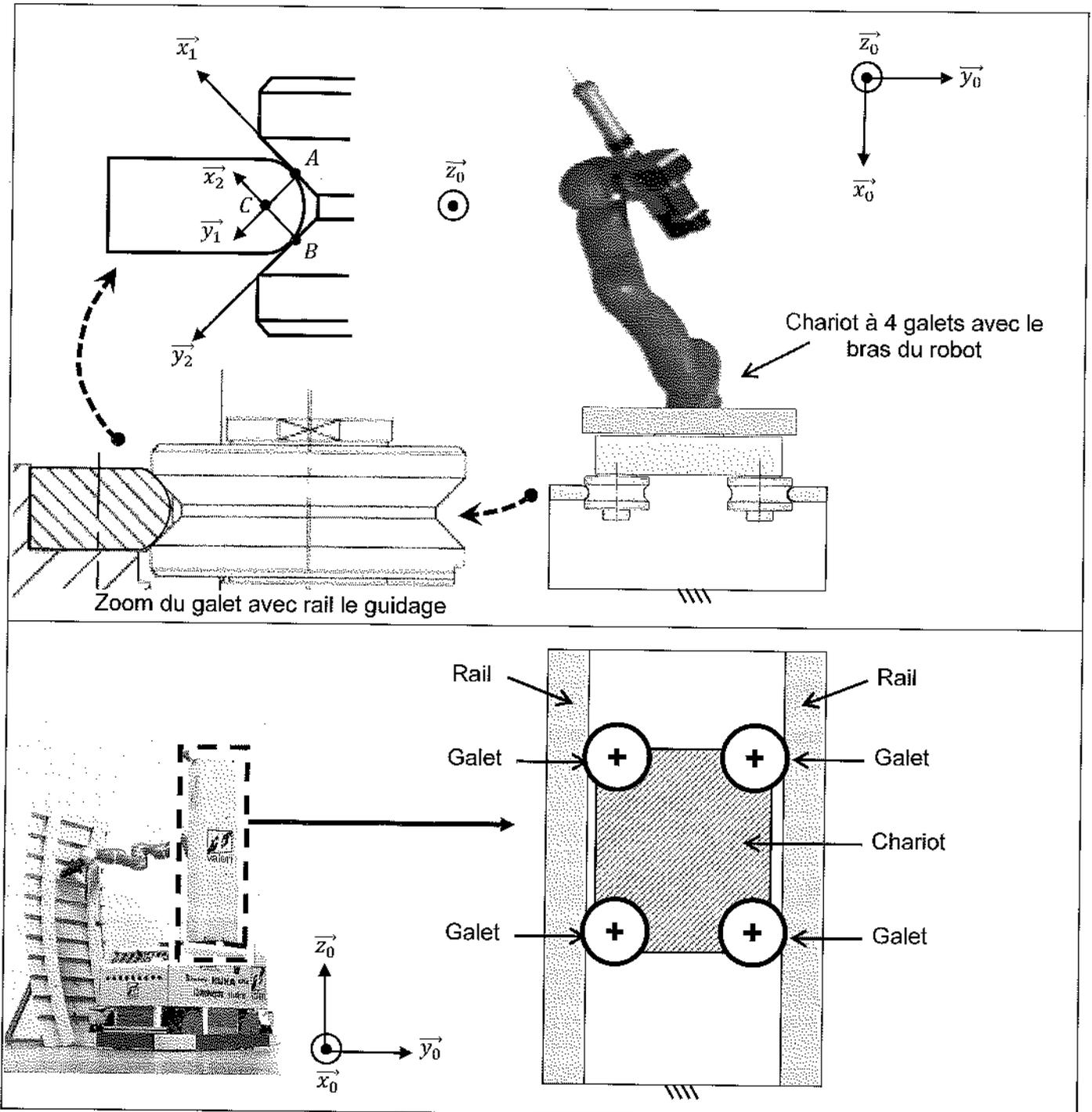


Figure 9 Détail interne du mécanisme de guidage en translation de l'axe Z

La Figure 9 détaille le mécanisme de guidage en translation de l'axe Z. Les 4 galets sont en liaisons pivot (centre du galet, direction  $\vec{x}_0$ ) avec le chariot. De plus chaque galet admet 2 liaisons ponctuelles en parallèle avec les rails du guidage formant le bâti de l'unité de translation.

**Question 10.** Donner la liaison équivalente entre un seul galet et le rail de guidage (bâti).

A)	B)	C)	D)
Ponctuelle en C de normale $\vec{y}_0$	Pivot glissant de centre C et d'axe $(C, \vec{z}_0)$	Linéaire annulaire de centre C et d'axe $(C, \vec{z}_0)$	Linéique rectiligne de droite de contact (AB) et de normale $\vec{y}_0$

**Question 11.** Dédurre de la question précédente la liaison équivalente entre le chariot et le bâti.

A)	B)	C)	D)
Pivot glissant de centre C et d'axe $(C, \vec{z}_0)$	Glissière de direction $\vec{z}_0$	Appui plan de normale $\vec{x}_0$	Liaison non normalisée

Nous souhaitons évaluer le degré d'hyperstatisme de la solution de guidage en translation entre le chariot et le bâti, qui est réalisé par les **12 liaisons** décrites précédemment.

**Question 12.** Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques  $l_c$ .

A)	B)	C)	D)
$l_c=44$	$l_c=28$	$l_c=12$	$l_c=8$

**Question 13.** Déterminer le nombre cyclomatique  $\mu$ .

A)	B)	C)	D)
$\mu = 5$	$\mu = 4$	$\mu = 8$	$\mu = 7$

**Question 14.** Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme  $m_c$ .

A)	B)	C)	D)
$m_c = 0$	$m_c = 2$	$m_c = 5$	$m_c = 1$

**Question 15.** En déduire le degré d'hyperstatisme  $h$ .

A)	B)	C)	D)
$h = 5$	$h = 3$	$h = 1$	$h = 2$

**Question 16.** Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme hyperstatique.

**A)** Avantage : une diminution des pertes donc un meilleur rendement. De plus, les procédés de fabrication sont simples et peu coûteux.

**B)** Avantage : montage rigide nécessaire en raison des actions mécaniques transmissibles importantes.

**C)** Inconvénient : des usinages et montages coûteux pour respecter les conditions géométriques relatives des surfaces fonctionnelles.

**D)** Inconvénient : un mécanisme hyperstatique ne fonctionne pas correctement, on lui préférera une solution isostatique.

**Question 17.** Quelles sont les conditions associées à cet hyperstatisme.

**A)**  
Conditions de parallélisme des axes des liaisons pivots

**B)**  
Conditions d'entraxe pour les pivots selon  $\vec{y}_0$

**C)**  
Le jeu dans les liaisons

**D)**  
L'élasticité des galets

**Question 18.** Sans introduire de liaisons supplémentaires, est-il possible de supprimer des liaisons ponctuelles pour rendre le système isostatique ? Préciser si cette modification permet d'avoir un fonctionnement sans risque pour le guidage en translation.

**A)**  
La suppression de 3 liaisons ponctuelles en supprimant :  

- un galet
- une ponctuelle (galet avec jeu)

 Le mécanisme est alors isostatique.

**B)**  
La suppression de 2 liaisons ponctuelles en supprimant un galet permet d'avoir un mécanisme isostatique sans risque pour le fonctionnement.

**C)**  
La suppression de 2 liaisons ponctuelles en supprimant un galet permet d'avoir un mécanisme isostatique présentant un risque d'arc-boutement néfaste pour le fonctionnement.

**D)**  
La suppression de 3 liaisons ponctuelles en supprimant un galet + une ponctuelle permet de rendre le mécanisme isostatique. Cependant cette solution n'assure plus le guidage en translation souhaité et de plus cela introduit un risque d'arc-boutement.

## II LOI ENTREE-SORTIE CINEMATIQUE

Objectif

Déterminer la loi entrée-sortie de la chaîne cinématique.

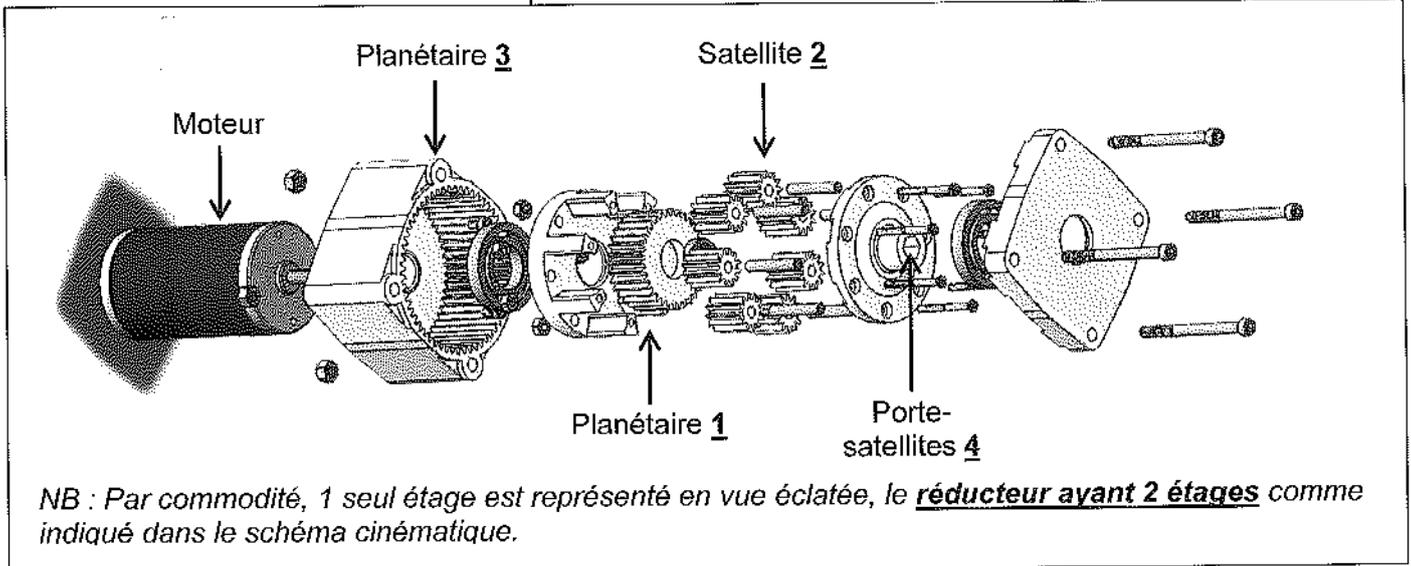
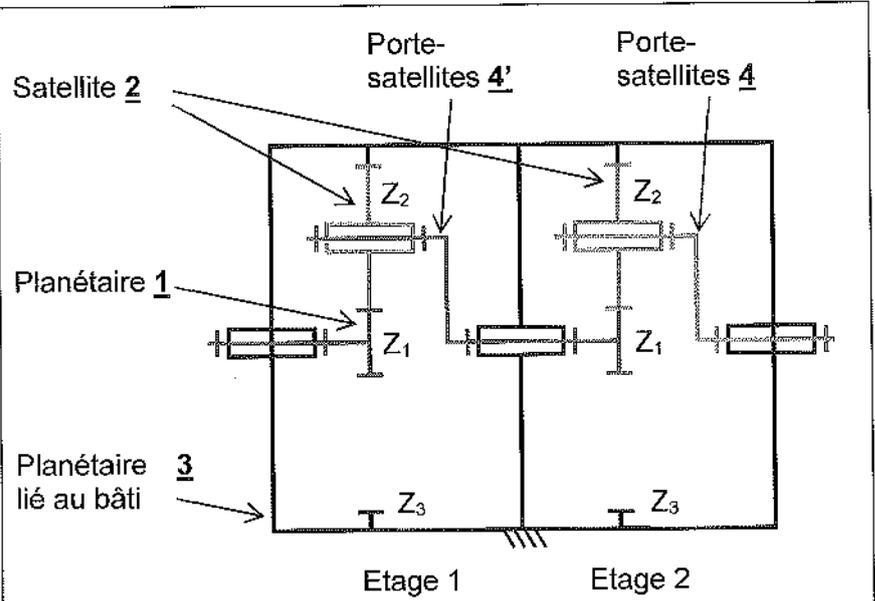
La chaîne cinématique est décrite dans l'annexe DOC 1 page 32 avec les notations associées.

Le réducteur mis en place est un train épicycloïdal de type *l* à **2 étages** dont le schéma cinématique est rappelé ci-après.

Le planétaire **1** est associé à l'entrée (vitesse de rotation notée  $\omega_m$ ) et le porte satellites **4** est associé à la sortie du réducteur (vitesse de rotation notée  $\omega_r$ ).

Nombre de dents et module *m*  
(attention 2 étages)

$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	<i>m</i>
36	12	60	2 mm



**Question 19.** Déterminer le rapport de transmission du réducteur  $k = \frac{\omega_r}{\omega_m}$  et faire l'application numérique.

A)	B)	C)	D)
$k = \left(\frac{Z_2}{Z_2 + Z_3}\right)^2 = \frac{1}{36}$	$k = \left(\frac{Z_1}{Z_3}\right)^2 = \frac{9}{25}$	$k = \left(\frac{Z_3}{Z_1}\right)^2 = \frac{25}{9}$	$k = \left(\frac{Z_1}{Z_1 + Z_3}\right)^2 = \frac{9}{64}$

**Question 20.** Déterminer le rapport de transmission global de la chaîne cinématique  $\lambda = \frac{v}{\omega_m}$ .

A)	B)	C)	D)
$\lambda = \frac{2}{k \cdot R}$	$\lambda = k \cdot \frac{R}{2}$	$\lambda = k \cdot R$	$\lambda = 2k \cdot R$

## PARTIE C    DIMENSIONNEMENT DE LA MOTORISATION D'AXE Z

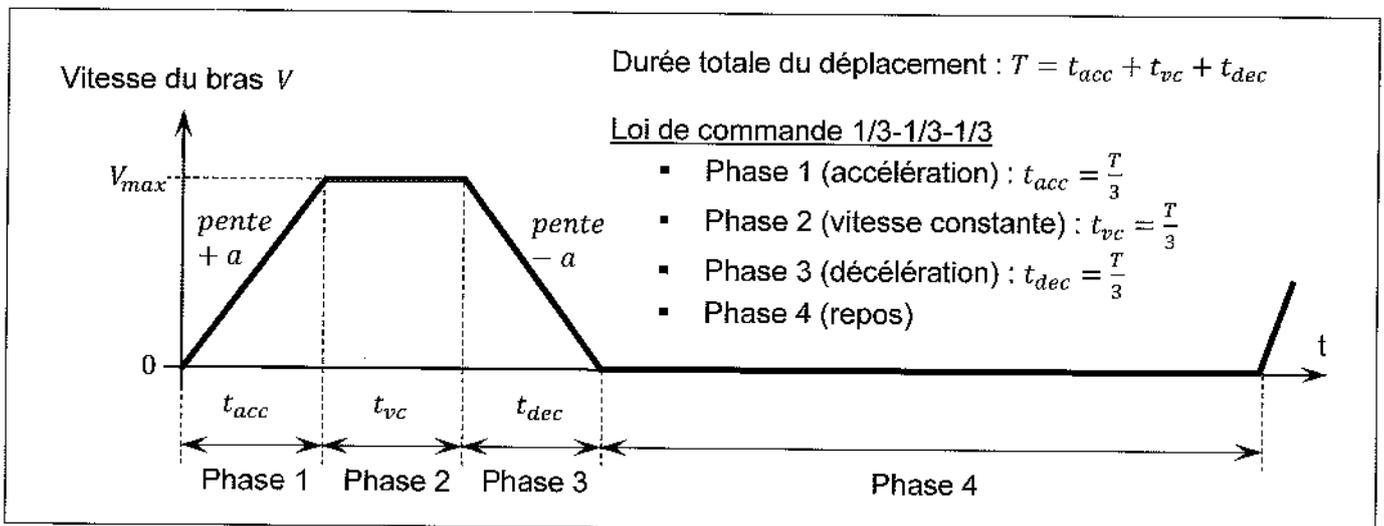
### Objectif

Déterminer la vitesse et l'accélération maximale en vue de dimensionner la motorisation.  
Vérifier le respect du cahier des charges en termes de durée de translation, de vitesse maximale de déplacement autorisée et de non basculement.

### I    NON BASCULEMENT DU ROBOT

La vitesse de scellement lente (100 mm/s) ne nécessitera pas un couple moteur  $C_m$  important en régime permanent. Ainsi pour dimensionner la motorisation, nous étudierons une phase de translation rapide de l'axe Z sans opération d'inspection et/ou de scellement, par exemple un retour rapide en position initiale.

Une loi classique de commande en trapèze de la vitesse du bras a été retenue. Afin de minimiser la puissance maximale demandée au moteur lors du déplacement, le profil de cette loi sera celui de la Figure 10 dite « loi 1/3 – 1/3 - 1/3 ».



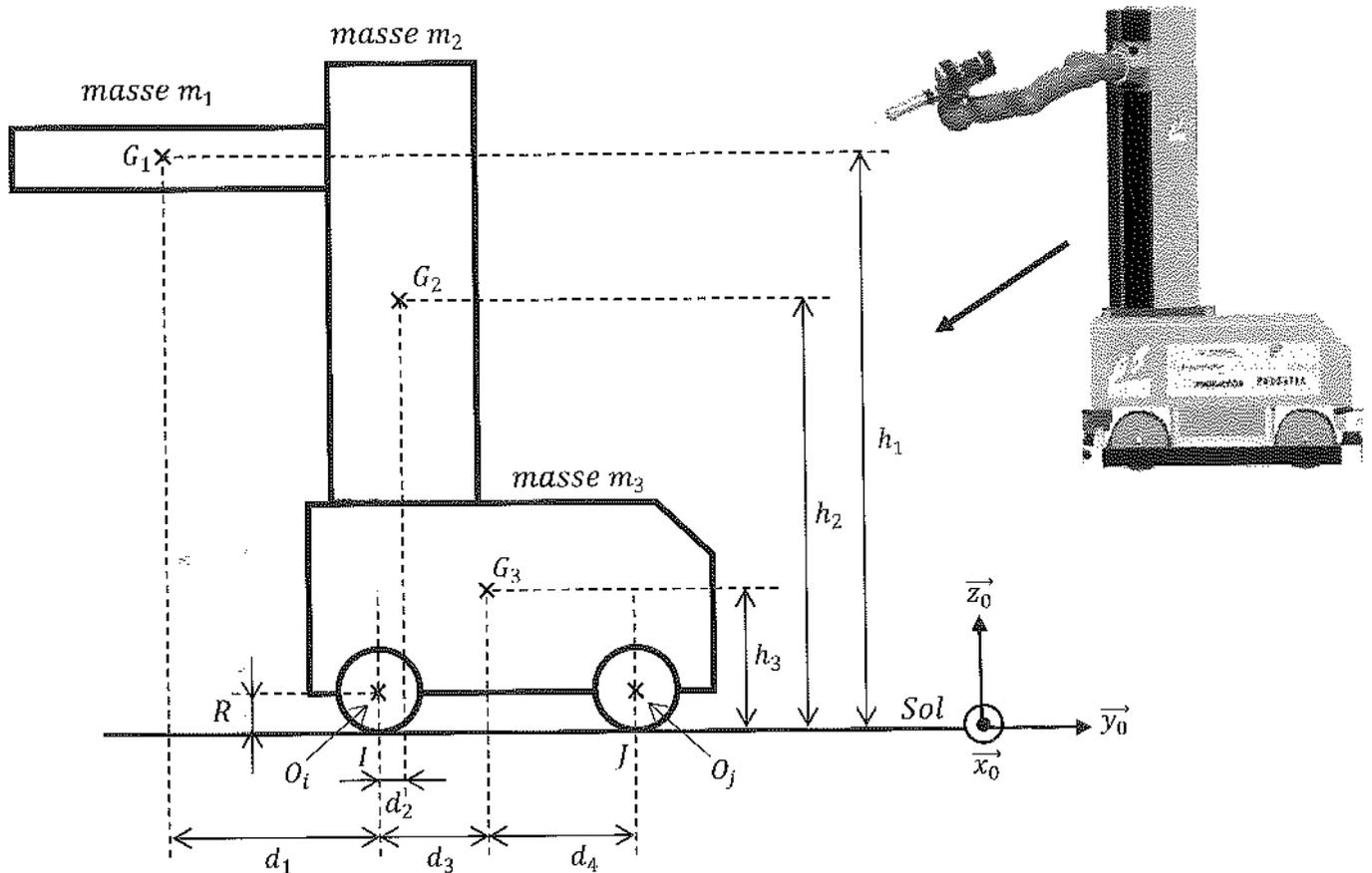
**Figure 10** Loi de vitesse en trapèze pour un déplacement Z en un temps T

**Remarque :**  $a \geq 0$  représente la norme de l'accélération du centre de gravité  $G_1$  du bras (solide  $S_1$ ).

La Figure 11 représente la situation la plus exposée au risque de basculement, celle-ci correspond au bras complètement déployé à l'horizontale dirigé vers l'avant du robot.

**Question 21.** Déterminer la phase dynamique la plus défavorable et indiquer la résultante dynamique du solide **1** notée  $\vec{R}_{d1}$ .

A)	B)	C)	D)
En phase d'accélération en montée ou bien de décélération en descente (freinage).	En phase d'accélération en descente ou bien de décélération en montée (freinage).	En phase d'accélération en descente ou bien de décélération en montée (freinage).	En phase d'accélération en montée ou bien de décélération en descente (freinage).
$\vec{R}_{d1} = \frac{3 m_1 \cdot V_{max}}{T} \cdot \vec{z}_0$	$\vec{R}_{d1} = -m_1 \cdot a \vec{z}_0$	$\vec{R}_{d1} = \frac{-3 m_1 \cdot V_{max}}{T} \cdot \vec{z}_0$	$\vec{R}_{d1} = m_1 \cdot a \vec{z}_0$



Dimensions en cm							
$h_1$	$h_2$	$h_3$	$R$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$
200	140	40	12	65	10	30	40

Masses en Kg		
$m_1$	$m_2$	$m_3$
10	15	60

Figure 11 Modélisation du robot Omnirob en situation exposée au risque de basculement

Question 22. Par un théorème judicieusement choisi, exprimer littéralement puis numériquement l'accélération maximale à la limite du basculement noté  $a_{max}$ .

**A)**

$$a_{max} = \frac{m_2 \sqrt{h_2^2 + d_2^2} + m_3 \sqrt{h_3^2 + d_3^2}}{m_1 \sqrt{h_1^2 + d_1^2}} \cdot g = 5 g$$

**B)**

$$a_{max} = \frac{m_2 \cdot d_2 + m_3 \cdot d_3 - m_1 \cdot d_1}{m_1 \cdot d_1} \cdot g = 2 g$$

**C)**

$$a_{max} = \frac{m_2 \cdot (h_2 - R) + m_3 \cdot (h_3 - R) - m_1 \cdot (h_1 - R)}{m_1 \sqrt{h_1^2 + d_1^2}} g$$

$= 10 g$

**D)**

$$a_{max} = \frac{m_2 \cdot d_3}{m_1 \cdot (d_1 + d_2)} \cdot g = 1 g$$

Le Tableau 1 synthétise les exigences de déplacement du bras extraites partiellement du cahier des charges.

Omnibot étant un robot collaboratif en milieu humain, la vitesse de translation du bras sera alors limitée à la vitesse de la marche humaine afin qu'un acteur humain puisse se sortir de situations délicates.

Tournez la page S.V.P.

Exigences	Critère(s)	Niveau(x)
Déplacer le bras du robot dans une phase rapide	Course	Z=1100 mm
	Durée	$T \leq 2s$
	Vitesse maximale	Limitée par la vitesse humaine $V_{max} \leq V_h = 1.7 \text{ m/s}$
	Accélération maximale	Limitée par le non basculement $a \leq \frac{a_{max}}{s}$ avec s un coefficient de sécurité

Tableau 1 Exigences relatives au déplacement du bras du robot

**Question 23.** Déterminer la durée totale de déplacement  $T$  ainsi que la vitesse maximale  $V_{max}$  lors d'un déplacement sur la course totale  $Z$  du bras.

A)	B)	C)	D)
$T = \sqrt{\frac{3Z}{2a}}$ $V_{max} = \frac{3Z}{2T}$	$T = \sqrt{\frac{Z}{2a}}$ $V_{max} = 3a.T$	$T = \sqrt{\frac{9Z}{2a}}$ $V_{max} = \frac{a.T}{3}$	$T = \sqrt{\frac{3Z}{a}}$ $V_{max} = \frac{3a.T}{2}$

Nous imposons une marge de sécurité confortable quant au non basculement en adoptant une accélération limitée à la valeur  $a = 5 \text{ m.s}^{-2}$ .

**Question 24.** Avec la valeur de l'accélération imposée,  $a = 5 \text{ m.s}^{-2}$ , réaliser les applications numériques. Conclure quant au respect du Cahier des Charges (CdC).

A)	B)	C)	D)
$T \approx 5 \text{ s}$ $V_{max} \approx 0.5 \text{ m/s}$ Le CdC n'est pas vérifié	$T \approx 1.5 \text{ s}$ $V_{max} \approx 1.25 \text{ m/s}$ Le CdC est vérifié	$T \approx 0.5 \text{ s}$ $V_{max} \approx 3 \text{ m/s}$ Le CdC n'est pas vérifié	$T \approx 1 \text{ s}$ $V_{max} \approx 1.65 \text{ m/s}$ Le CdC est vérifié

## II DIMENSIONNEMENT DE LA MOTORISATION

### Objectif

L'objectif de cette partie est de déterminer le couple moteur maximal à fournir par la motorisation puis de proposer et justifier un choix du moteur.

Hypothèses :

- La courroie est supposée infiniment rigide
- Les rendements sont définis en régime permanent et sont supposés constants (invariance vis-à-vis de la vitesse et du couple).
- Les pertes seront négligées en régime transitoire par conséquent les rendements ne seront pas pris en compte<sup>1</sup> dans ce domaine.

<sup>1</sup> En régime transitoire, les rendements varient en fonction de grandeurs diverses : vitesse, couple, température, lubrification. De ce fait, les rendements usuels n'ont été définis que pour le régime permanent.

La chaîne cinématique du mécanisme de l'unité de translation verticale est décrite dans l'annexe DOC 1 page 32 avec les notations associées.

**Question 25.** Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble mobile  $\Sigma$  par rapport au référentiel  $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  supposé galiléen, que l'on notera  $T_{\Sigma/0}$  en fonction de  $V, \omega_m, \omega_r, J_a, J_b, J_r, J_m, m_1$  et  $R$ .

<b>A)</b>
$T_{\Sigma/0} = (m_1 V^2 + 4 J_a \omega_r^2 + 3 J_b \omega_r^2 + J_r \omega_r^2 + J_m \omega_m^2)$

<b>B)</b>
$T_{\Sigma/0} = \frac{1}{2} (m_1 V^2 + 8 J_a \omega_r^2 + 3 J_b \omega_r^2 + J_r \omega_m^2 + J_m \omega_m^2)$

<b>C)</b>
$T_{\Sigma/0} = \frac{1}{2} (m_1 V^2 + 2 J_a \omega_r^2 + 3 J_b \omega_r^2 + J_r \omega_r^2 + J_m \omega_m^2)$

<b>D)</b>
$T_{\Sigma/0} = (m_1 V^2 + 2 J_a \omega_r^2 + 3 J_b \omega_r^2 + J_r \omega_m^2 + J_m \omega_m^2)$

**Question 26.** Déterminer le moment d'inertie équivalent  $J_{eq}$  de l'ensemble mobile  $\Sigma$  ramené sur l'arbre du moteur avec les notations précédentes, le gain de vitesse introduit à la Question 20 noté  $\lambda = \frac{v}{\omega_m}$  ainsi que le rapport de transmission du réducteur  $k = \frac{\omega_r}{\omega_m}$ .

<b>A)</b>
$J_{eq} = m_1 \lambda^2 + (2 J_a + 3 J_b + J_r) k^2 + J_m$

<b>B)</b>
$J_{eq} = 2 [m_1 \lambda^2 + (4 J_a + 3 J_b + J_r) k^2 + J_m]$

<b>C)</b>
$J_{eq} = m_1 \lambda^2 + (8 J_a + 3 J_b) k^2 + J_r + J_m$

<b>D)</b>
$J_{eq} = \frac{1}{2} [m_1 \lambda^2 + (2 J_a + 3 J_b) k^2 + J_r + J_m]$

**Question 27.** Dans le cadre de la recherche du couple maximal, calculer les puissances galiléennes totales, développées par les efforts extérieurs et les inter-efforts, appliquées sur l'ensemble mobile  $\Sigma$  et notées respectivement  $P_{ext}$  et  $P_{int}$  dans le régime transitoire.

<b>A)</b>
$P_{ext} = (m_1 g \lambda - C_m) \omega_m$
$P_{int} = (1 - \eta_r \eta_{pc} \eta_g) C_m \omega_m$

<b>B)</b>
$P_{ext} = -(m_1 g \cdot a + C_m) \omega_m$
$P_{int} = 0$ car les pertes ne sont pas prises en compte pour le régime transitoire.

<b>C)</b>
$P_{ext} = -m_1 g a + C_m \omega_m$
$P_{int} = (1 - \eta_r \eta_{pc} \eta_g) m_1 g a$

<b>D)</b>
$P_{ext} = (C_m - m_1 g \lambda) \omega_m$
$P_{int} = 0$ car les pertes ne sont pas prises en compte pour le régime transitoire.

**Question 28.** En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile  $\Sigma$ , déterminer le couple moteur  $C_m$  en fonction des notations précédentes et de  $V_{max}$  et  $T$  définies à la Figure 10.

<b>A)</b>
$C_m = \frac{3 V_{max} J_{eq}}{\lambda T} + m_1 g \lambda$

<b>B)</b>
$C_m = \frac{V_{max}^2 J_{eq}}{\lambda T} - m_1 g \lambda$

<b>C)</b>
$C_m = \frac{V_{max} J_{eq}}{\lambda^2 T} + m_1 g a$

<b>D)</b>
$C_m = \frac{V_{max} J_{eq}}{3 \lambda T} + m_1 g \lambda$

**Question 29.** Déterminer le couple moteur en régime permanent noté  $C_{mp}$ , dans ce domaine les divers rendements sont pris en compte.

<b>A)</b>
$C_{mp} = \frac{V_{max} J_{eq}}{3 \lambda T \eta_r \eta_{pc} \eta_g}$

<b>B)</b>
$C_{mp} = \frac{m_1 g a}{1 - \eta_r \eta_{pc} \eta_g}$

<b>C)</b>
$C_{mp} = \frac{m_1 g \lambda}{\eta_r \eta_{pc} \eta_g}$

<b>D)</b>
$C_{mp} = \frac{-m_1 g \lambda}{\eta_r + \eta_{pc} + \eta_g}$

On définit le couple d'accélération, noté  $C_{ma}$ , comme le couple moteur nécessaire à l'entraînement des masses mobiles sans le bras, par conséquent cela revient à considérer une masse  $m_1 = 0 \text{ Kg}$ .

Les constructeurs de moteur utilisent alors le couple crête  $C_{crête}$  (couple maximal) qui correspond à la somme du couple d'accélération et du couple permanent, soit  $C_{crête} = C_{mp} + C_{ma}$ .

**Question 30.** Calculer le couple crête  $C_{crête}$ .

A)	B)	C)	D)
$\frac{3 V_{max} J_{eq}}{\lambda T} + \frac{m_1 g \lambda}{\eta_r \eta_{pc} \eta_g}$	$\frac{V_{max} J_{eq}}{3 \lambda T} + \frac{m_1 g \lambda}{1 - \eta_r \eta_{pc} \eta_g}$	$\frac{V_{max} J_{eq}}{3 \lambda T \eta_r \eta_{pc} \eta_g} + \frac{m_1 g \lambda}{1 - \eta_r \eta_{pc} \eta_g}$	$\frac{V_{max} J_{eq}}{\lambda^2 T} + \frac{m_1 g a}{\eta_r + \eta_{pc} + \eta_g}$

A ce stade de l'étude, l'évaluation du couple crête  $C_{crête}$  à fournir par le moteur nécessite de connaître la seule inconnue, à savoir le moment d'inertie du moteur  $J_m$ .

Pour faciliter le choix du moteur, parmi la présélection du catalogue (voir annexe DOC 2 page 33), la Figure 12 permet de déterminer le couple crête  $C_{crête}$  à fournir en fonction du moment d'inertie du moteur  $J_m$ .

De plus la loi de vitesse en trapèze étudiée précédemment (Question 23) impose une vitesse de rotation maximum du moteur telle que  $\omega_{max} = \frac{v_{max}}{\lambda} \approx 300 \text{ rad.s}^{-1} < 3000 \text{ tr.min}^{-1}$ .

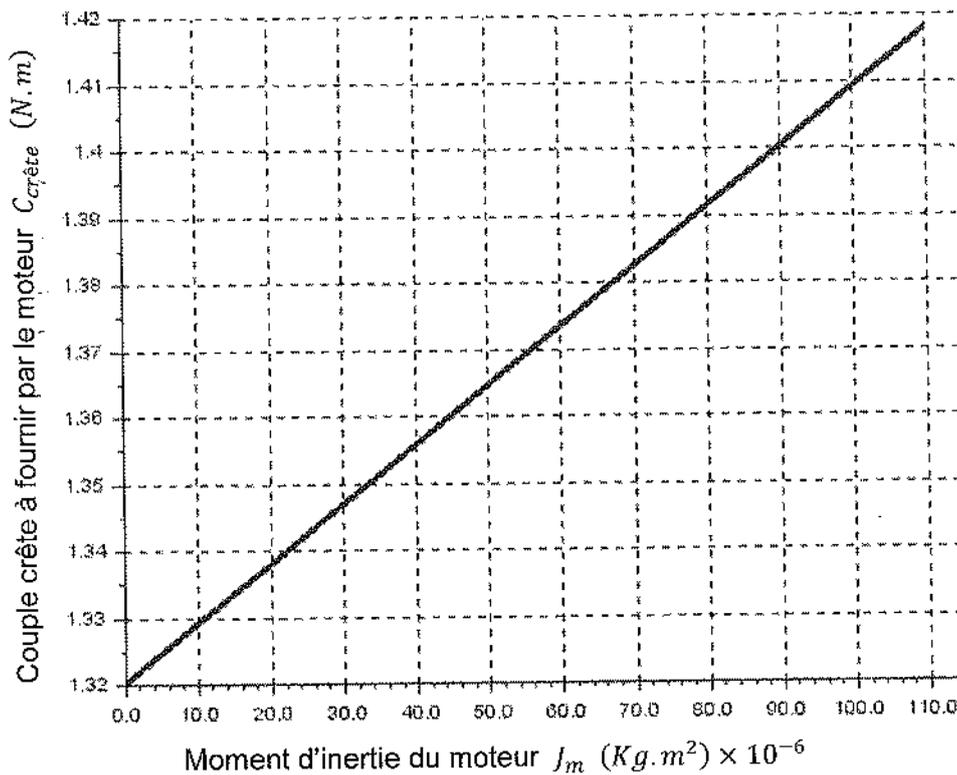


Figure 12 Evolution du couple crête en fonction du moment d'inertie du moteur  $C_{crête} = f(J_m)$

**Question 31.** A partir des résultats précédents, proposer un choix de motorisation issue du catalogue constructeur des moteurs brushless (DOC 2 page 33) en s'appuyant sur les courbes couple-vitesse du moteur.

A)	B)	C)	D)
Le moteur SAR5ACN	Le moteur SC02ADK-9	Le moteur SB03ADK-9	Le moteur SB05ADK-9

## I    MODELISATION DE L'ACTIONNEUR MSAP

———— Objectifs ————

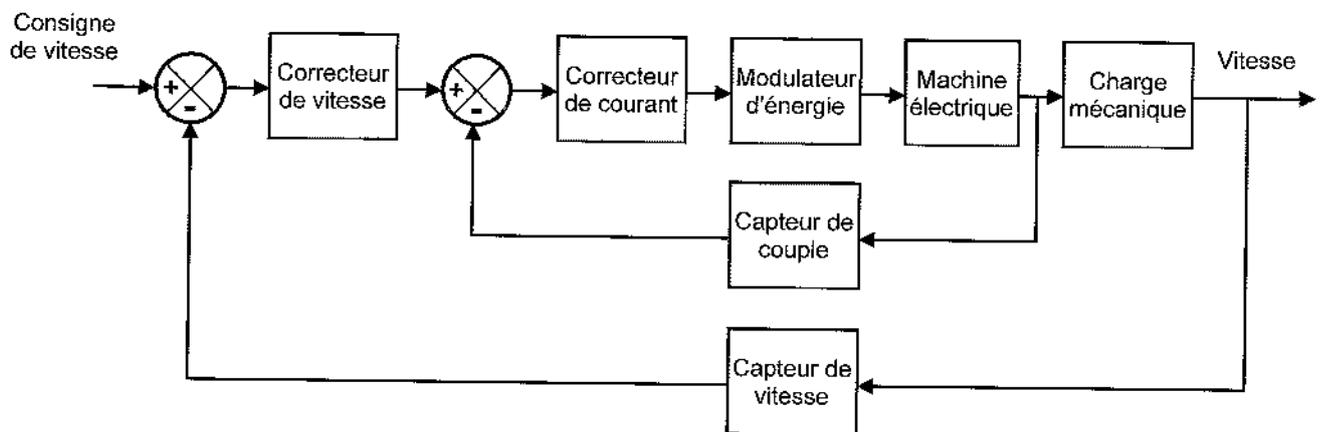
Concevoir la chaîne d'asservissement en vitesse du module de translation de l'axe vertical Z. L'actionneur mis en œuvre est un moteur brushless présenté en annexe DOC 2 page 33.

La partie C a permis de déterminer la loi de commande en vitesse du robot à respecter. Afin de maîtriser celle-ci, il est nécessaire de contrôler précisément les vitesses angulaires en termes de régime permanent mais aussi de régime transitoire.

Le moteur électrique associé à l'axe de translation vertical Z est du type machine synchrone autopilotée (noté MSAP dans la suite du sujet).

L'asservissement en vitesse angulaire du moteur, décrit Figure 13, nécessite deux boucles :

- Une boucle dite interne qui permet de contrôler les courants électriques circulant dans chaque phase de l'actionneur et par conséquent le couple moteur ;
- Une boucle dite externe qui permet d'asservir la vitesse angulaire du moteur.



**Figure 13 Schéma de principe de l'asservissement en vitesse et courant (# couple) d'une machine électrique**

*Remarque : bien que la Figure 13 ne présente qu'une boucle de courant, il y a physiquement 3 boucles de courant, une pour chaque phase du moteur synchrone autopiloté.*

## II MODÉLISATION DU MOTEUR SYNCHROME AUTO-PILOTEE (MSAP)

### Objectif

Modélisation électrique et mécanique du moteur synchrone autopiloté (MSAP) dit également moteur brushless à commande sinusoïdale.

Un modèle mathématique adapté à l'étude des régimes dynamique et permanent, consiste à proposer un système biphasé équivalent. Ce modèle considère que le MSAP est équivalent à 2 moteurs à courant continu diphasés fictifs (un sur l'axe direct noté d, l'autre sur l'axe en quadrature noté q).

Dans le cadre d'équilibre électrique des phases, de l'hypothèse de pôles lisses, le modèle de connaissance du MSAP se simplifie dans la base « d, q » (dit plan de Park) et donne les équations ci-après :

$$v_d(t) = R \cdot i_d(t) + L \cdot \frac{d i_d(t)}{dt} - L \cdot i_q(t) \cdot n \cdot \omega_m(t) \quad (\text{Eq1})$$

$$v_q(t) = R \cdot i_q(t) + L \cdot \frac{d i_q(t)}{dt} + L \cdot i_d(t) \cdot n \cdot \omega_m(t) + n \cdot \Phi_r \cdot \omega_m(t) \quad (\text{Eq2})$$

$$c_m(t) = \frac{3}{2} \cdot n \cdot \Phi_r \cdot i_q(t) \quad (\text{Eq3})$$

$$J_{eq} \cdot \frac{d \omega_m(t)}{dt} = c_m(t) - f \cdot \omega_m(t) - c_r(t) \quad (\text{Eq4})$$

Où  $R$  représente la résistance électrique des 2 moteurs à courant continu fictifs,  $L$  l'inductance cyclique,  $\Phi_r$  le flux rotorique (axe direct d) généré par une paire d'aimant permanent,  $n$  le nombre de paires d'aimant permanent,  $J_{eq}$  le moment d'inertie équivalent ramené sur l'arbre du moteur,  $f$  le coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'arbre moteur.

Les tensions  $v_d(t)$  et  $v_q(t)$  sont les tensions d'alimentation des 2 phases fictives des 2 moteurs à courant continu,  $i_d(t)$  et  $i_q(t)$  les courants absorbés par ceux-ci.

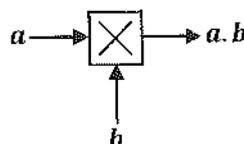
Les quatre équations (Eq1 à Eq4) peuvent être représentées dans le domaine de Laplace, avec les conditions de Heaviside, par le schéma structurel Figure 14.

Notations :

On adopte les notations suivantes entre le domaine temporel et celui de Laplace.

Domaine temporel f(t)	Domaine de Laplace L[f(t)]=F(p)
$v_d(t)$ : tension moteur phase directe d	$V_d(p)$
$v_q(t)$ : tension moteur phase en quadrature q	$V_q(p)$
$i_d(t)$ : courant moteur absorbé phase directe d	$I_d(p)$
$i_q(t)$ : courant moteur absorbé phase en quadrature q	$I_q(p)$
$\omega_m(t)$ : vitesse de rotation du moteur	$\Omega_m(p)$
$c_m(t)$ : couple moteur	$C_m(p)$
$c_r(t)$ : couple résistant dû aux frottements sec	$C_r(p)$

Le symbole  correspond à l'opérateur multiplication. Par exemple, la multiplication de  $a$  par  $b$  sera représentée symboliquement de la manière suivante :



Tournez la page S.V.P.

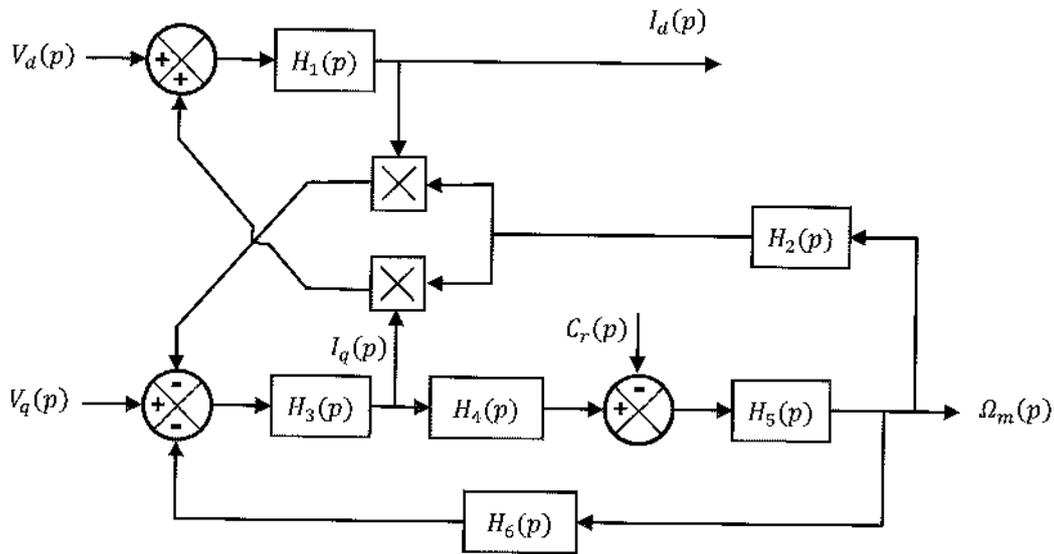


Figure 14 Schéma bloc structurel de la machine synchrone auto-commutée dans le référentiel tournant (d,q)

Question 32. Déterminer les fonctions de transfert  $H_i(p)$  ( $i \in \llbracket 1,6 \rrbracket$ ).

- |    |   |                      |   |   |                           |
|----|---|----------------------|---|---|---------------------------|
| A) | $H_1(p) = H_3(p) = \frac{\frac{3}{2}}{R + L \cdot p}$ | $H_2(p) = L$         | $H_4(p) = \Phi_r$                                   | $H_5(p) = \frac{n}{J_{eq} \cdot p + f}$ | $H_6(p) = \Phi_r$         |
| B) | $H_1(p) = H_3(p) = \frac{1}{R + L \cdot p}$           | $H_2(p) = n \cdot L$ | $H_4(p) = \frac{3}{2} \cdot n \cdot \Phi_r$         | $H_5(p) = \frac{1}{J_{eq} \cdot p + f}$ | $H_6(p) = n \cdot \Phi_r$ |
| C) | $H_1(p) = H_3(p) = R + L \cdot p$                     | $H_2(p) = n$         | $H_4(p) = \frac{3}{2} \cdot n \cdot L \cdot \Phi_r$ | $H_5(p) = \frac{n}{J_{eq} \cdot p + f}$ | $H_6(p) = \Phi_r$         |
| D) | $H_1(p) = H_3(p) = \frac{2}{3} (R + L \cdot p)$       | $H_2(p) = L$         | $H_4(p) = \Phi_r$                                   | $H_5(p) = \frac{1}{J_{eq} \cdot p + f}$ | $H_6(p) = n \cdot \Phi_r$ |

Afin de contourner les problèmes de non-linéarités, une approche consiste à considérer  $i_d(t)$  à l'origine d'une perturbation pour découpler le système et asservir uniquement le courant  $i_q(t)$  et de ce fait le couple moteur  $C_m(t)$ , voir Figure 15.

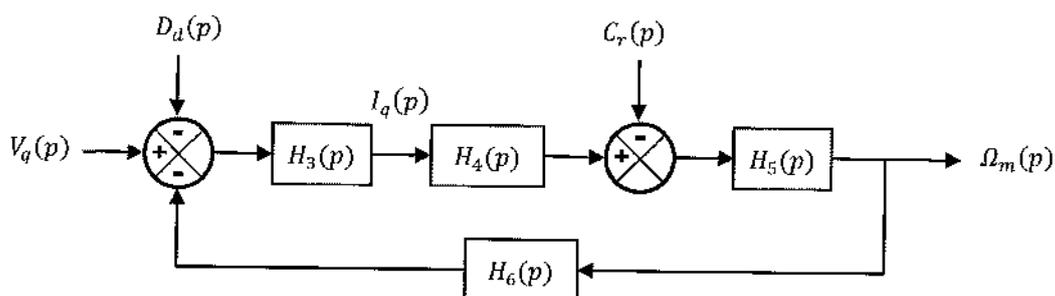


Figure 15 Découplage du système - Asservissement de  $i_q(t)$  de la MSAP

Par ailleurs, une solution simple permettant à la fois de maximiser le rendement du MSAP et d'annuler la perturbation provenant de  $i_d(t)$  revient à garder en permanence  $i_d(t) = 0$ .

On considère par la suite que la boucle de courant relative à l'asservissement du courant  $i_d(t)$  est parfaite, c'est-à-dire que le courant  $i_d(t)$  peut être considéré nul quel que soit l'instant  $t$  choisi.

**Question 33.** Déterminer la valeur de la commande en tension  $v_d(t)$  à imposer pour garantir une commande anticipée (prédictive) qui régule un courant  $i_d(t)$  à la valeur nulle quel que soit l'instant  $t$  choisi.

A)	B)	C)	D)
$v_d(t) = -L \cdot i_q(t) \cdot n \cdot \omega_m(t)$	$v_d(t) = L \cdot i_q(t) \cdot n \cdot \omega_m(t)$	$v_d(t) = L \cdot i_q(t) \cdot \omega_m(t)$	$v_d(t) = -L \cdot i_q(t) \cdot \omega_m(t)$

**Question 34.** D'après la question précédente, préciser la ou les assertions exactes afin d'assurer une régulation parfaite du courant  $i_d(t)$  par anticipation.

A)	B)	C)	D)
Un capteur à jauge de déformation doit être mis en place pour la mesure du couple moteur.	La mesure de la vitesse angulaire $\omega_m(t)$ doit être précise.	Le courant $i_q(t)$ n'est pas mesuré.	La mesure de la position angulaire du rotor est assurée par un capteur potentiométrique monotour.

Dans les conditions énoncées ci-dessus, nous avons montré que l'on peut ramener le modèle de la MSAP à un modèle linéaire équivalent à celui d'un moteur à courant continu à excitation indépendante. A partir de ce modèle, l'asservissement de vitesse peut être synthétisé au moyen de techniques classiques développées pour les systèmes linéaires.

On considère le schéma-bloc de la Figure 16 relatif au modèle de l'actionneur en charge en négligeant le couple résistant  $C_r(p)$  et sans perturbation  $D_d(p)$  (le courant  $i_d(t)$  étant maintenu nul).

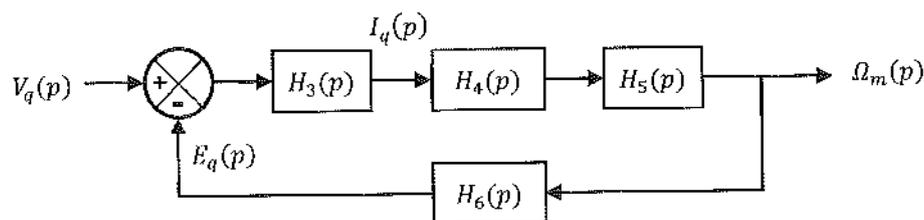


Figure 16 Découplage du système idéal

**Question 35.** Déterminer l'expression du coefficient de force contre-électromotrice  $k_e$  tel que  $E_q(p) = k_e \cdot \Omega_m(p)$  ainsi que le coefficient de couple  $k_t$  tel que  $C_m(p) = k_t \cdot I_q(p)$  comme dans les équations d'un moteur à courant continu à aimant permanent.

A)	B)	C)	D)
$k_e = k_t = \frac{3}{2} \cdot n \cdot \Phi_r$	$k_e = 1$ et $k_t = \frac{3}{2}$	$k_e = k_t = \Phi_r$	$k_e = \frac{2}{3} k_t = n \cdot \Phi_r$

### III ÉTUDE DE LA BOUCLE DE COURANT $i_q(t)$

\_\_\_\_\_ Objectif \_\_\_\_\_

Justifier la nécessité d'une boucle de courant  $i_q(t)$ .

Procéder au dimensionnement des paramètres du correcteur de la boucle de courant  $i_q(t)$ .

**Question 36.** La fonction de transfert  $R(p) = \frac{i_q(p)}{V_q(p)}$  s'écrit :

<b>A)</b>
$\frac{H_3(p)}{1 + H_3(p)H_4(p) - H_6(p)}$

<b>B)</b>
$H_3(p)$

<b>C)</b>
$H_3(p)H_4(p)H_5(p)H_6(p)$

<b>D)</b>
$\frac{H_3(p)H_4(p)H_5(p)}{1 + H_3(p)H_4(p)H_5(p)H_6(p)}$

Pour la suite du sujet, on prendra la fonction de transfert  $R(p) = \frac{i_q(p)}{V_q(p)} = \frac{f}{k_e k_t + R f} \cdot \frac{1 + \frac{J_{eq}}{f} p}{1 + \frac{R J_{eq} + L f}{k_e k_t + R f} p + \frac{L J_{eq} p^2}{k_e k_t + R f}}$

On définit :

$$T_e = \frac{L}{R} \quad T_e \text{ est appelée constante de temps électrique}$$

$$T_m = \frac{R J_{eq}}{k_e k_t + R f} \quad T_m \text{ est appelée constante de temps mécanique}$$

D'après les performances du moteur retenu, nous pouvons vérifier que  $R \cdot f \ll k_e \cdot k_t$  ainsi que  $T_e \ll T_m$ .  
Le dénominateur de la fonction de transfert  $R(p)$  peut alors se mettre sous la forme ci-après :

$$1 + \frac{R J_{eq} + L f}{k_e k_t + R f} p + \frac{L J_{eq} p^2}{k_e k_t + R f} \approx 1 + (T_e + T_m) \cdot p + T_e \cdot T_m \cdot p^2 \quad \text{avec } T_e + T_m \approx T_m$$

**Question 37.** Avec l'hypothèse  $T_e \ll T_m$  nous ferons l'approximation que la fonction de transfert  $R(p)$  se réduit à une fonction du 1<sup>er</sup> ordre. Préciser alors la nouvelle fonction de transfert  $R(p)$ .

<b>A)</b>
$R(p) = \frac{K_r \cdot (1 + T_r \cdot p)}{1 + T_m \cdot p}$ avec $\begin{cases} K_r = \frac{f}{k_e \cdot k_t + R \cdot f} \\ T_r = \frac{J_{eq}}{f} \end{cases}$

<b>B)</b>
$R(p) = \frac{K_r \cdot (1 + T_r \cdot p)}{1 + T_m \cdot p + T_e \cdot T_m \cdot p^2}$ avec $\begin{cases} K_r = \frac{f}{k_e \cdot k_t} \\ T_r = \frac{J_{eq}}{f} \end{cases}$

<b>C)</b>
$R(p) = \frac{K_r \cdot (1 + T_r \cdot p)}{1 + (T_e + T_m) \cdot p}$ avec $\begin{cases} K_r = \frac{f}{R \cdot f} \\ T_r = \frac{J_{eq}}{f} \end{cases}$

<b>D)</b>
$R(p) = \frac{K_r \cdot (1 + T_r \cdot p)}{1 + T_e \cdot p}$ avec $\begin{cases} K_r = \frac{1}{R} \\ T_r = \frac{J_{eq}}{f} \end{cases}$

Pour la suite du sujet, nous conserverons le modèle approché du 1<sup>er</sup> ordre pour la fonction de transfert  $R(p)$ .

**Question 38.** En utilisant le théorème de la valeur initiale pour une tension de commande échelon de 48V, estimer le pic de courant  $I_0$  au démarrage ?

**A)**

$$I_0 = 48 \cdot K_r = 12 \text{ A}$$

**B)**

$$I_0 = \frac{48 \cdot K_r \cdot T_r}{T_m} = \frac{48}{R} = 300 \text{ A}$$

**C)**

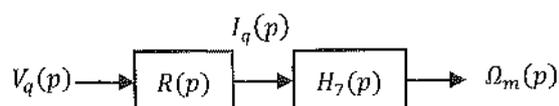
$$I_0 = \frac{48 \cdot K_r \cdot T_r}{T_e \cdot T_m} = 88235 \text{ A}$$

**D)**

$$I_0 = \frac{48 \cdot K_r \cdot T_r}{T_e + T_m} = 214 \text{ A}$$

Pour éviter des pics de courant prohibitifs, on se doit de contrôler le courant  $i_q(t)$ .

Le schéma bloc du moteur MSAP (Figure 16) peut avoir une représentation fictive sous la forme suivante :

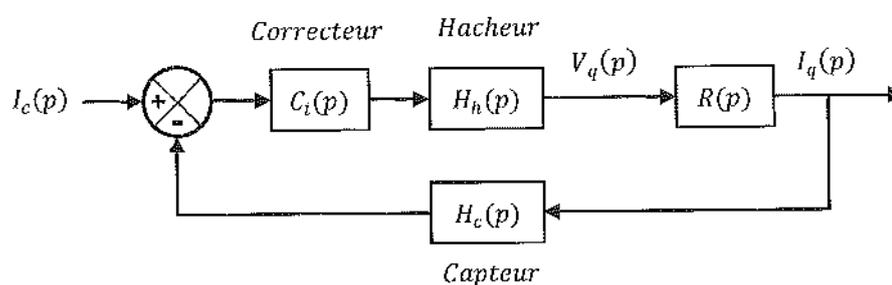


avec  $R(p)$  définie précédemment à la Question 37.

**Question 39.** Déterminer  $H_7(p)$ .

A)	B)	C)	D)
$\frac{k_t}{J_{eq} \cdot p + f}$	$\frac{R \cdot f \cdot k_t}{(k_e \cdot k_t + R \cdot f)(J_{eq} \cdot p + f)}$	$\frac{k_e \cdot k_t}{(k_e \cdot k_t + R \cdot f)(J_{eq} \cdot p + f)}$	$\frac{k_t}{(k_e \cdot k_t + R \cdot f)(J_{eq} \cdot p + f)}$

L'asservissement de courant étant justifié, nous allons mettre en place le bouclage suivant :



**Figure 18** Boucle d'asservissement en courant  $I_q$

Le capteur de courant dans la boucle de retour est une sonde à effet Hall associée à un filtre pour atténuer les ondulations du courant dues à la commande MLI du hacheur.

- $H_c(p) = \frac{K_c}{1 + T_c \cdot p}$  avec  $K_c = 1$  sans unité et  $T_c = 0.5 \text{ ms}$
- $C_i(p) = K_i \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right)$  avec  $T_i = 2 \text{ ms}$
- On assimile le hacheur à un gain pur  $H_h(p) = K_h = 10$

Tournez la page S.V.P.

**Question 40.** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement de courant que l'on notera  $H_i^{BO}(p)$ . Donner l'ordre et la classe.

**A)**

$$H_i^{BO}(p) = \frac{K_i \cdot K_h \cdot K_c \cdot K_r \cdot (1 + T_r \cdot p) T_i \cdot p}{(1 + T_m \cdot p)(1 + T_i \cdot p)}$$

Ordre 2 - classe 1

**B)**

$$H_i^{BO}(p) = \frac{K_i \cdot K_h \cdot K_c \cdot K_r \cdot T_i \cdot p \cdot (1 + T_i \cdot p)}{(1 + T_r \cdot p)(1 + T_m \cdot p)(1 + T_c \cdot p)}$$

Ordre 3 - classe 1

**C)**

$$H_i^{BO}(p) = \frac{K_i \cdot K_h \cdot K_c \cdot K_r \cdot (1 + T_r \cdot p)(1 + T_i \cdot p)}{T_i \cdot p(1 + T_m \cdot p)(1 + T_c \cdot p)}$$

Ordre 3 - classe 1

**D)**

$$H_i^{BO}(p) = \frac{K_i \cdot K_h \cdot K_c \cdot K_r \cdot (1 + T_i \cdot p)}{T_i \cdot p(1 + (T_e + T_m) \cdot p + T_e \cdot T_m \cdot p^2)(1 + T_c \cdot p)}$$

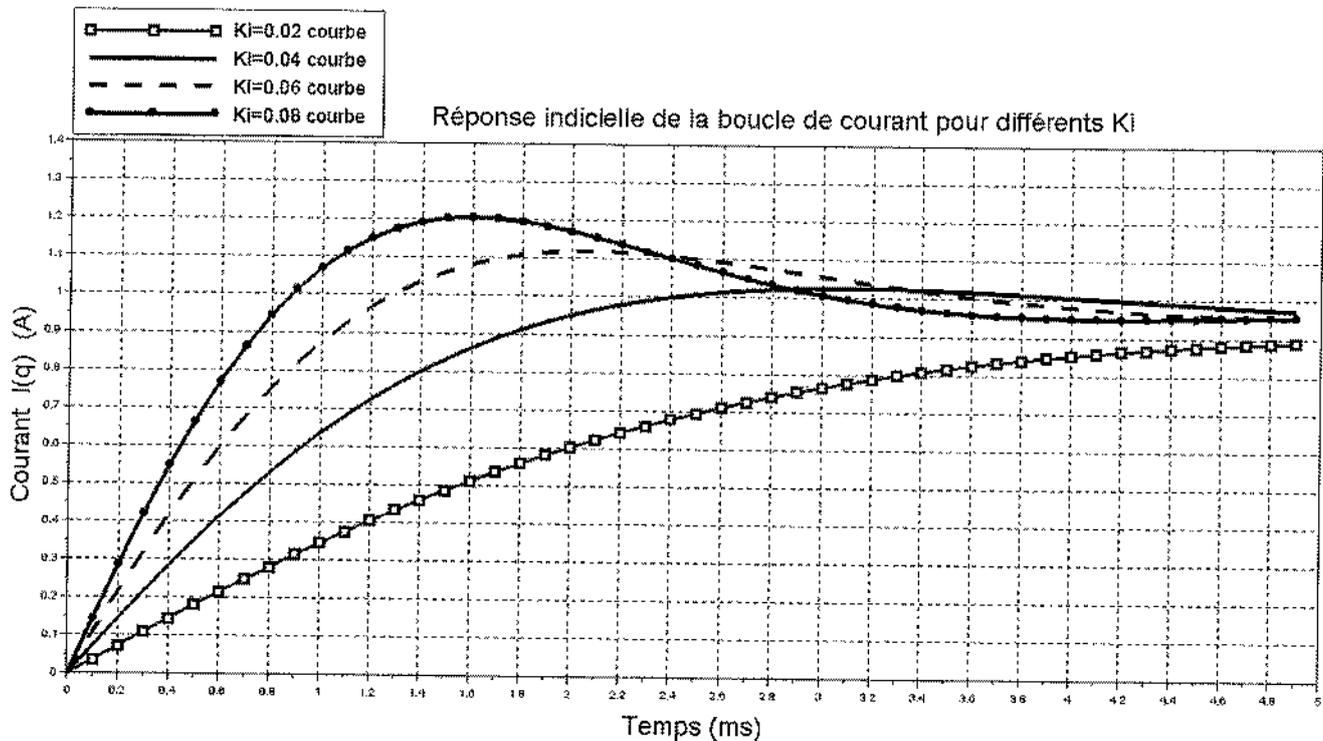
Ordre 3 - classe 1

Le tracé du diagramme de Bode (gain et phase) de  $H_i^{BO}(p)$  pour  $K_i = 1$  est donné Figure 21 dans l'annexe DOC 3 page 34.

**Question 41.** Quelle est la valeur maximum de  $K_i$  qui assure une marge de phase supérieure à  $50^\circ$  ?

A)	B)	C)	D)
$K_{imax} = 0.1$	$K_{imax} = 0.05$	$K_{imax} = 0.01$	$K_{imax} = 0.5$

On fournit sur la Figure 19 des résultats de simulation de la boucle de courant  $i_q(t)$  pour une consigne de courant en échelon d'amplitude 1A avec différents réglages du gain du correcteur  $K_i$ .



**Figure 19** Réponse indicielle de la boucle de courant pour différents réglages de  $K_i$

**Question 42.** Choisir le gain  $K_i$  pour avoir un temps de réponse à 5% inférieur à 2 ms tout en garantissant une marge de phase supérieure à  $50^\circ$ .

A)	B)	C)	D)
$K_i = 0.02$	$K_i = 0.04$	$K_i = 0.06$	$K_i = 0.08$

**Question 43.** Proposer un modèle de comportement de la fonction de transfert en boucle fermée de l'asservissement en courant  $H_i^{BF}(p) = \frac{I_q(p)}{I_c(p)}$ .

A)	B)	C)	D)
$\frac{1}{1 + 2 \cdot 10^{-4} \cdot p}$	$\frac{1}{1 + 7 \cdot 10^{-4} \cdot p}$	$\frac{1}{1 + 10^{-4} \cdot p}$	$\frac{1}{1 + 10^{-3} \cdot p}$

#### IV ÉTUDE DE LA BOUCLE DE VITESSE ANGULAIRE

Objectif

Procéder au choix des paramètres du correcteur de la boucle de vitesse.

Le cahier des charges de la boucle de vitesse est fourni dans le tableau 2 ci-dessous.

Exigences	Critère(s)	Niveau(x)
Contrôler la vitesse angulaire de rotation	Stabilité	MG > 15 dB
		$M\phi = 45^\circ$
	Précision	Erreur statique nulle $\varepsilon_s = 0$
		Erreur de traînage $\varepsilon_t < 1$ rad/s pour une rampe de pente $900$ rad/s <sup>2</sup>
	Rapidité	La pulsation de coupure à 0 dB de la fonction de transfert en boucle ouverte devra être telle que : $\omega_{0dB} \geq 500$ rad/s

Tableau 2 – Exigences relatives au contrôle de la vitesse de la MSAP

A partir des réglages précédents, la Figure 20 donne le schéma-bloc partiel de l'asservissement de vitesse angulaire de l'actionneur, en absence de couple résistant  $c_r(t)$ . Le capteur de vitesse est supposé de gain pur  $K_V$ .

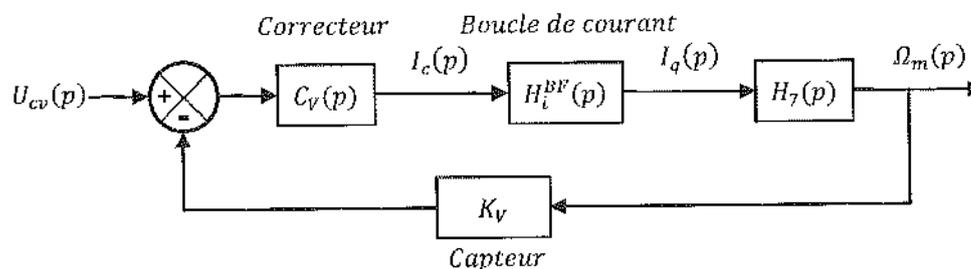


Figure 20 – Schéma-bloc de l'asservissement de vitesse

Afin de respecter le cahier des charges, on opte pour la mise en place d'une correction proportionnelle intégrale.

- La fonction de transfert du correcteur est alors :  $C_V(p) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$
- La fonction de transfert de la boucle de courant sera notée :  $H_i^{BF}(p) = \frac{K_i^{BF}}{1 + T_i^{BF} p}$
- Le gain du capteur de la chaîne de retour est  $K_V = 0.1$  V.s.rad<sup>-1</sup>

Tournez la page S.V.P.

**Question 44.** Justifier le choix du type de correction.

A)	B)	C)	D)
La stabilité est améliorée par l'avance de phase du correcteur.	Le retard de phase n'engendre pas d'instabilité donc la constante $T$ peut être fixée très petite.	Erreur statique nulle vérifiée par l'action intégrale.	Rapidité réglable par l'action proportionnelle.

**Question 45.** La fonction de transfert en boucle ouverte  $FTBO(p)$  est :

A)	B)
$\frac{K \cdot K_i^{BF} \cdot k_t \cdot K_V \cdot (1 + T \cdot p)}{T \cdot p (1 + T_i^{BF} \cdot p) (J_{eq} \cdot p + f)}$	$\frac{K \cdot K_i^{BF} \cdot k_t \cdot K_V \cdot p (1 + T \cdot p)}{(1 + T_i^{BF} \cdot p) (J_{eq} \cdot p + f)}$
C)	D)
$\frac{K_V \cdot (1 + T \cdot p)}{T \cdot p (1 + T_i^{BF} \cdot p) (J_{eq} \cdot p + f)}$	$\frac{(1 + T \cdot p)}{T \cdot p (1 + T_i^{BF} \cdot p) (J_{eq} \cdot p + f)}$

Quels que soient les résultats trouvés précédemment, on prendra :

$$J_{eq} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \text{ et } f = 4 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$$

**Question 46.** Par une méthode de compensation du pôle dominant, déduire la constante de temps  $T$  du correcteur.

A)	B)	C)	D)
$T = T_i^{BF}$	$T = \frac{J_{eq}}{f}$	$T = 20 \text{ ms}$	$T = 2 \text{ ms}$

**Question 47.** Par conséquent, déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée  $FTBO_{cor}(p)$  ainsi que son ordre et sa classe.

A)	B)
$\frac{k_t}{J_{eq} \cdot p \cdot (1 + T_i^{BF} \cdot p)}$ Ordre 1 - classe 1	$\frac{K \cdot K_i^{BF} \cdot k_t \cdot K_V}{J_{eq} \cdot (1 + T_i^{BF} \cdot p)}$ Ordre 1 - classe 0
C)	D)
$\frac{K \cdot K_i^{BF} \cdot k_t \cdot K_V}{J_{eq} \cdot p \cdot (1 + T_i^{BF} \cdot p)}$ Ordre 2 - classe 1	$\frac{K_V}{J_{eq} \cdot p \cdot (1 + T_i^{BF} \cdot p)}$ Ordre 1 - classe 1

La Figure 22 dans l'annexe DOC 4 page 35, représente le diagramme de Bode (gain et phase) de la  $FTBO_{cor}(p)$  avec  $K = 1$  et  $T$  obtenue à la question précédente.

**Question 48.** Déterminer les marges de gain et de phase.

A)		B)		C)		D)	
$M_g$	$\infty$	$M_g$	$-\infty$	$M_g$	+40 dB	$M_g$	- 120 dB
$M_\varphi$	$90^\circ$	$M_\varphi$	- 180°	$M_\varphi$	$45^\circ$	$M_\varphi$	-90°

**Question 49.** Déterminer la valeur de  $K$  à imposer pour satisfaire le critère de marge de phase.

A)	B)	C)	D)
$K = 10$	$K = 1$	$K = 100$	$K = 0.1$

Les réponses temporelles pour une régulation de vitesse de 300 rad/s et une poursuite de pente 900 rad/s<sup>2</sup> du système corrigé sont données Figure 23 et Figure 24 dans l'annexe DOC 5 page 36.

**Question 50.** Préciser si les performances attendues dans le Cahier des Charges (CdC) sont respectées ?

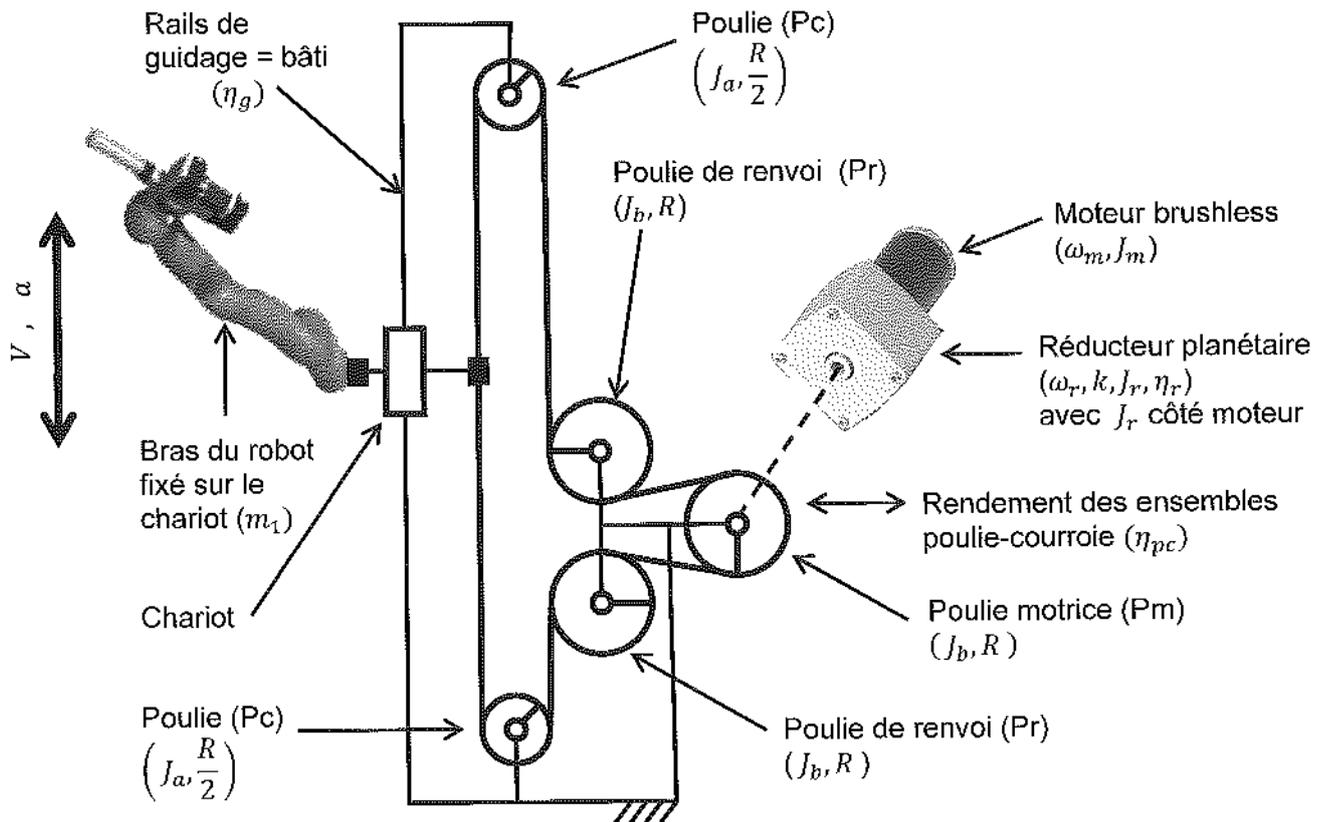
A)	B)	C)	D)																				
CdC non respecté car : L'erreur statique est non nulle et que l'erreur de traînage est infinie	CdC respecté car <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tr><td><math>M_g</math></td><td>-120 dB</td></tr> <tr><td><math>M_\varphi</math></td><td>-90°</td></tr> <tr><td><math>\varepsilon_s</math></td><td>0 rad/s</td></tr> <tr><td><math>\varepsilon_t</math></td><td>0.6 ms</td></tr> <tr><td><math>\omega_{0dB}</math></td><td>1000 rad/s</td></tr> </table>	$M_g$	-120 dB	$M_\varphi$	-90°	$\varepsilon_s$	0 rad/s	$\varepsilon_t$	0.6 ms	$\omega_{0dB}$	1000 rad/s	CdC non respecté car :  $\omega_{0dB} = 14 \text{ rad/s}$ $< 500 \text{ rad/s}$	CdC respecté car <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tr><td><math>M_g</math></td><td><math>\infty</math></td></tr> <tr><td><math>M_\varphi</math></td><td><math>45^\circ</math></td></tr> <tr><td><math>\varepsilon_s</math></td><td>0</td></tr> <tr><td><math>\varepsilon_t</math></td><td>0.6 rad/s</td></tr> <tr><td><math>\omega_{0dB}</math></td><td>1000 rad/s</td></tr> </table>	$M_g$	$\infty$	$M_\varphi$	$45^\circ$	$\varepsilon_s$	0	$\varepsilon_t$	0.6 rad/s	$\omega_{0dB}$	1000 rad/s
$M_g$	-120 dB																						
$M_\varphi$	-90°																						
$\varepsilon_s$	0 rad/s																						
$\varepsilon_t$	0.6 ms																						
$\omega_{0dB}$	1000 rad/s																						
$M_g$	$\infty$																						
$M_\varphi$	$45^\circ$																						
$\varepsilon_s$	0																						
$\varepsilon_t$	0.6 rad/s																						
$\omega_{0dB}$	1000 rad/s																						



**FIN DU QUESTIONNAIRE**



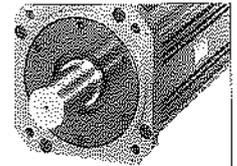
# DOC 1 CHAÎNE D'ÉNERGIE DE L'UNITÉ DE TRANSLATION AXE Z



Notations	Données
<p><math>C_m</math> : couple moteur</p> <p><math>\omega_m</math> : vitesse de rotation du moteur</p> <p><math>J_m</math> : moment d'inertie du rotor autour de son axe</p> <p><math>C_r</math> : couple en sortie du réducteur</p> <p><math>J_r</math> : moment d'inertie du réducteur <u>sur l'arbre d'entrée (côté moteur)</u></p> <p><math>\omega_r</math> : vitesse de rotation du réducteur</p> <p><math>k = \frac{\omega_r}{\omega_m} &lt; 1</math> : rapport de transmission du réducteur</p> <p><math>\eta_r</math> : rendement du réducteur</p> <p><math>Z_1, Z_2, Z_3</math> le nombre de dents respectivement du planétaire <u>1</u>, du satellite <u>2</u> et du planétaire <u>3</u>.</p> <p><math>J_a</math> : moment d'inertie de la poulie Pc</p> <p><math>J_b</math> : moment d'inertie de la poulie Pr identique à Pm</p> <p><math>\eta_{pc}</math> : rendement du système poulie-courroie</p> <p><math>V</math> : norme de la vitesse de translation du bras</p> <p><math>a</math> : norme de l'accélération du bras</p> <p><math>m_1</math> : masse du bras du robot</p> <p><math>\eta_g</math> : rendement du guidage chariot-bâti</p> <p><math>\lambda = \frac{V}{\omega_m}</math> : rapport de transmission global de la chaîne cinématique</p> <p><math>Z</math> : course totale du bras du robot</p>	<p><u>Rendements :</u></p> <p style="text-align: center;"><math>\eta_r = 0.95 \quad \eta_{pc} = 0.98 \quad \eta_g = 0.88</math></p> <p><u>Masse à déplacer</u> <math>m_1 = 10 \text{ Kg}</math></p> <p><u>Inertie :</u></p> <p style="text-align: center;"><math>J_m</math> à déterminer      <math>J_r = 10^{-6} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2</math>  <math>J_a = 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2</math>      <math>J_b = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2</math></p> <p><u>Poulies :</u></p> <p>La poulie motrice (Pm) et les 2 poulies de renvoi (Pr) sont identiques de rayon <math>R = 40 \cdot 10^{-3} \text{ m}</math></p> <p>Les 2 poulies (Pc) sont identiques de rayon <math>\frac{R}{2} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}</math></p> <p><u>Réducteur :</u></p> <p>De type planétaire à <b>2 étages</b></p> <p>Nombres de dents et module par étage :</p> <p style="text-align: center;"><math>Z_1 = 36 \quad   \quad Z_2 = 12 \quad   \quad Z_3 = 60 \quad   \quad m = 2 \text{ mm}</math></p> <p><u>Course du bras :</u></p> <p>La course totale du bras : <math>Z = 1100 \text{ mm}</math></p>

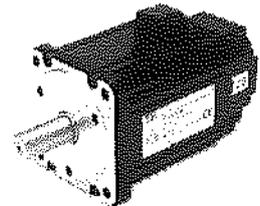
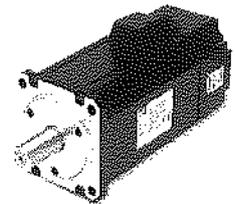
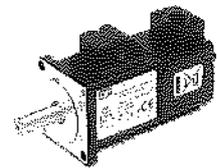


# Gamme de moteurs Brushless basse tension

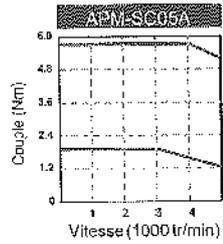
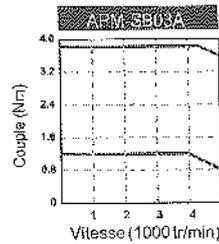
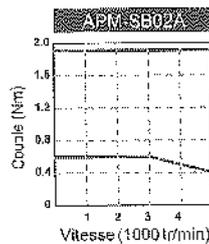
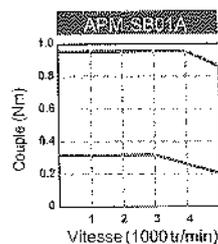
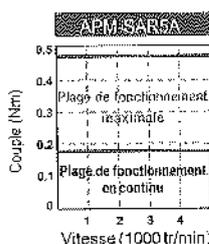


## Caractéristiques du moteur (vitesse nominale 3000 tr/min):

Servomoteurs APM	SAR5ACN	SA01ACN-8	SB02ADK-9	SB03ADK-9	SC05ADK-9
Taille de la bride (mm)	40		60		80
Puissance nominale (W)	50	100	200	300	450
Courant (A)	2,4	2,38	5,0	9,62	9,24
Courant maximal (A)	35,98	17,08	61,30	95,24	27,07
Couple nominal (Nm)	0,16	0,318	0,637	0,95	1,43
Couple max (Nm)	0,48	0,955	1,912	2,85	4,25
Vitesse nominale (tr/min)	3000				
Vitesse max (tr/min)	5000				
Constante de vitesse Ke (V/KRPM)	10,1	8,1	8,1	8,4	9,8
Inertie (kg.m <sup>2</sup> x10 <sup>-4</sup> )	0,0164	0,045	0,182	0,324	1,0889
Charge inertielle	-	30 x Inertie du moteur	20 x Inertie du moteur		15 x Inertie du moteur
Constante de couple Kt (Nm/A)	0,0667	0,1393	0,1305	0,1010	0,1570
Coefficient de frottement visqueux (Nm.s/rad m <sup>2</sup> x10 <sup>-3</sup> )	4				
Inductance (Phase/Phase)(mH)	-	2,132	1,316	0,660	0,554
Resistance (Phase/Phase)(Ω)	-	2,556	0,400	0,251	0,160
Codeur standard (Tension 5V)	Incémental 2.048 P/R		Incémental 2.500 P/R		
Protection	IP 55				IP 65
Classe d'isolation	B				
Environnement	Pas d'exposition à la lumière du soleil, pas de gaz corrosif ou inflammable aux alentours, pas de poussière				
Température	Température de fonctionnement : 0-40°C, Température de stockage : -20-80°C				
Humidité	Inférieure à 90 %				
Vibrations	49 m/s <sup>2</sup> (5G)				
Poids (kg)	0,3	0,5	1,08	1,63	2,52



## Courbes de couple :



# DOC 3    DIAGRAMME DE BODE – BOUCLE COURANT

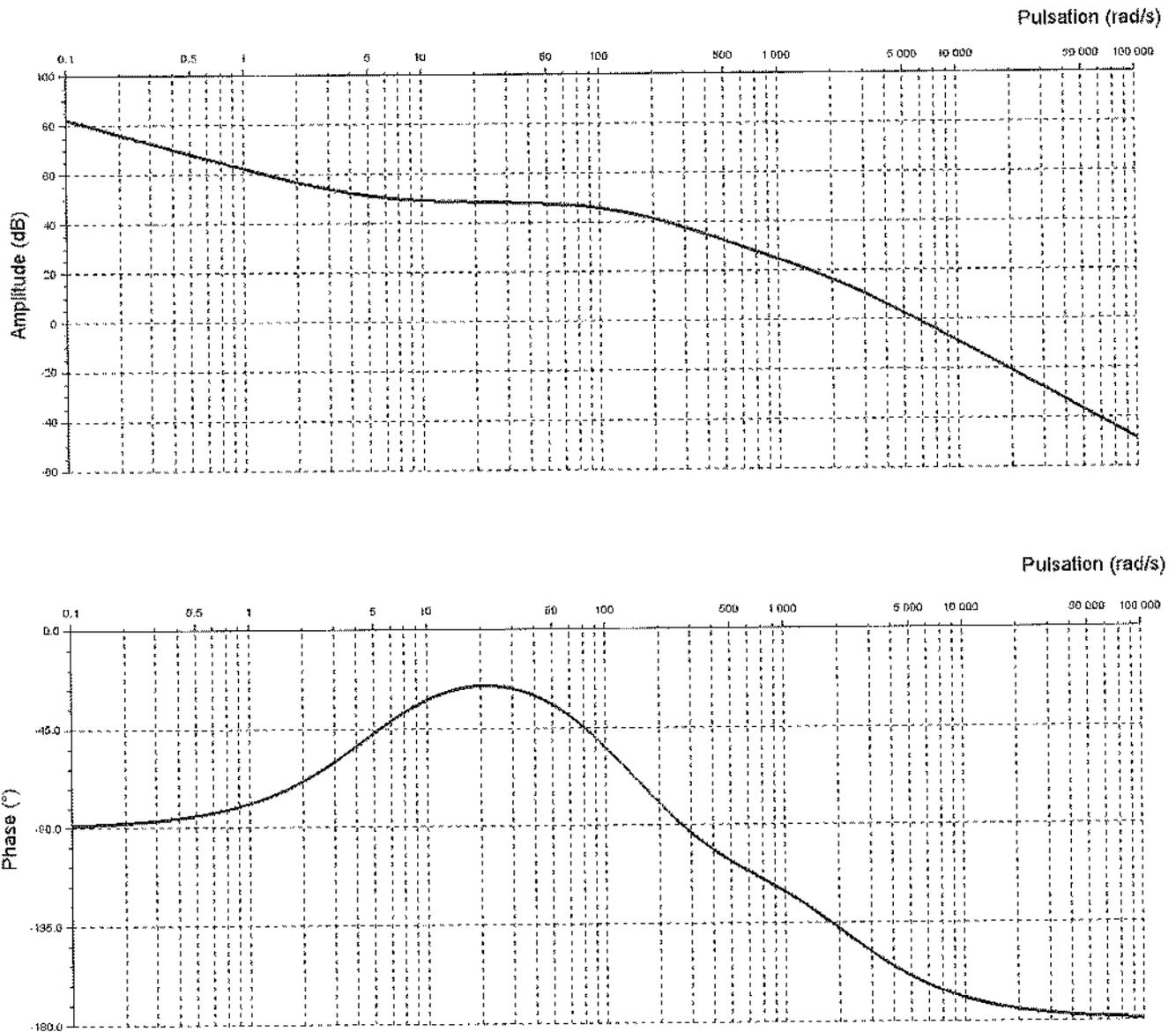


Figure 21 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO de la boucle de courant  $H_i^{BO}(p)$  pour  $K_i = 1$

# DOC 4 DIAGRAMME DE BODE – ASSERVISSEMENT VITESSE

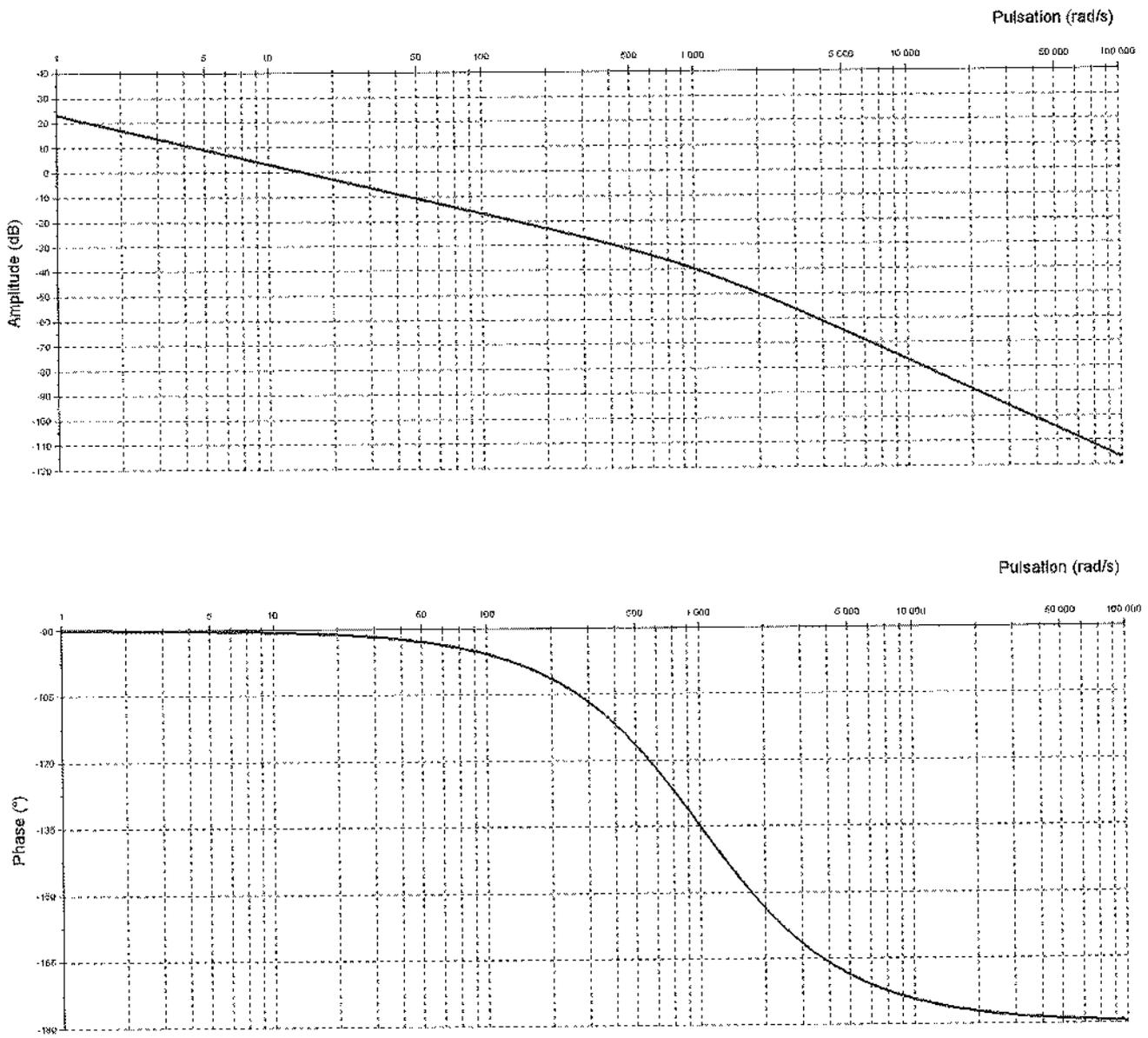


Figure 22 Diagramme de Bode (Gain - Phase) de la FTBO de l'asservissement de vitesse ( $K=1$  et  $T$  réglée)

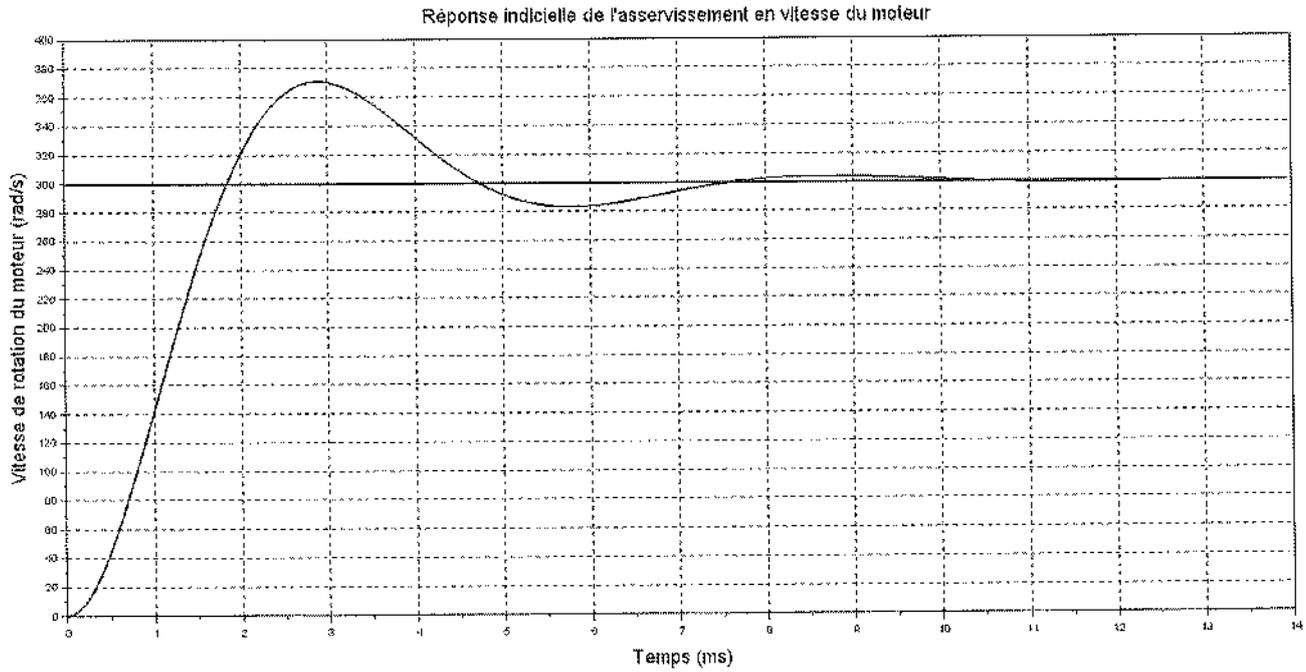


Figure 23 Réponse indicielle de l'asservissement en vitesse du moteur (corrigée)

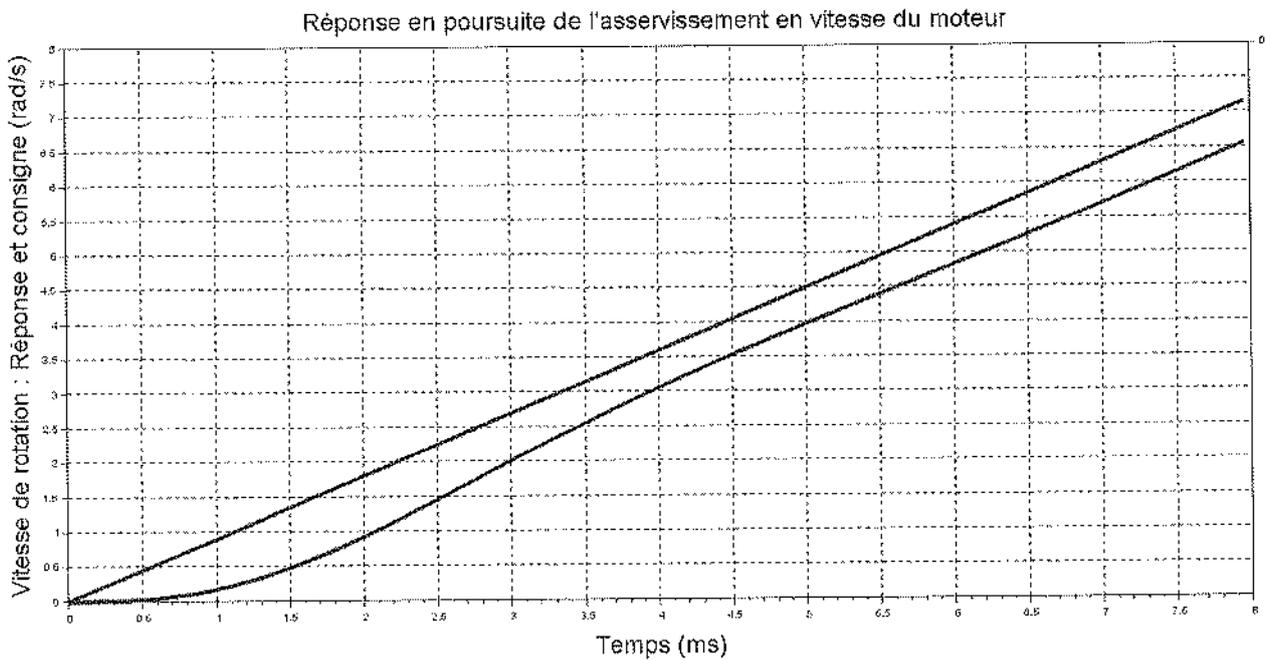


Figure 24 Réponse en poursuite de l'asservissement en vitesse du moteur (corrigée)

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

Session 2019

CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT  
D'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE



**ÉPREUVE FACULTATIVE  
D'ITALIEN**

Durée : 1 heure

Coefficient : Bonus



Cette épreuve comporte :

- 1 page de garde recto
- 1 page de consignes recto
- 1 page de texte et questions recto

**TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT  
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)**

**ÉPREUVE FACULTATIVE D'ITALIEN**

- 1) Vous devez composer lisiblement sur les copies avec un stylo à encre foncée : bleue ou noire et à bille ou feutre.
- 2) Les effaceurs correcteurs (comme le tippex) sont interdits car ils peuvent laisser des résidus sur les vitres du scanner lors de la numérisation des copies.
- 3) Numéroté chaque page de composition pour faciliter la correction de la copie (il n'est pas nécessaire de numéroté les pages entièrement blanches) dans la zone prévue en bas à droite de chaque copie.

Par exemple, pour la 6<sup>ème</sup> page d'une copie comportant 7 pages de composition et une page blanche, numéroté ainsi pour la page 6 sur 7 :

..6/..7.

- 4) Vous devez composer uniquement sur les supports de composition officiels pour l'épreuve.
- 5) Aucun brouillon ne sera ramassé avec les copies

## A scuola armati di smartphone

All'epoca dei primi cellulari, Umberto Eco scrisse che li considerava congegni accettabili soltanto se usati da idraulici e medici per chiamate di emergenza. Scherzava, ma non troppo, perché dava voce a una diffidenza radicata verso uno strumento che avrebbe cambiato per sempre la comunicazione e i rapporti tra le persone. Sono passati quasi trent'anni e oggi è diventato impensabile vivere senza quella protesi mobile che non si limita più a farci telefonare, ma ci tiene in perenne contatto con il mondo privato, con quello del lavoro, con le informazioni di ogni tipo che fluttuano liberamente nel web. Però l'ingresso autorizzato degli smartphone nella scuola (anche se più o meno clandestinamente ci sono sempre stati), è un drastico passo in avanti di cui non si sentiva l'urgenza. L'intento dichiarato è farne uno dei tanti linguaggi che arricchiscono la conoscenza, ma sembra incredibile che la ministra Fedeli non sappia qual è l'uso « sapiente » che fanno i ragazzi: dalle traduzioni istantanee di brani classici alla caccia via Google di ogni nozione. Che sarà accolta senza contesto e riferimenti, né capacità di distinguere il vero dal falso. Prima di immaginare una scuola digitale sarebbe quindi necessario digitalizzare gli insegnanti, facendone delle guide esperte che accompagnino gli studenti anche attraverso le confuse strade di Internet. Dato che per gli uni e gli altri l'illusione di avere il mondo in tasca genera un rischio : quello dell'ignoranza.

Stefania Rossini, L'Espresso ottobre 2017.



Tradurre :

Da «Sono passati quasi trent'anni... » a « liberamente nel web.» (4 points)

Domande :

- 1) Spiegate perché come afferma Stefania Rossini il cellulare ha cambiato per sempre la comunicazione e i rapporti tra le persone. (8 points)
- 2) Qual'è il pericolo della «caccia» via Google di ogni nozione ? (8 points)

CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT  
D'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE



**ÉPREUVE OBLIGATOIRE**  
**D'ANGLAIS**

Durée : ~~4~~<sup>2</sup> heures

Coefficient : 3



Cette épreuve comporte :

- 1 page de garde recto
- 1 page de consignes recto
- 13 pages de texte recto-verso

**TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT  
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)**

ÉPREUVE OBLIGATOIRE D'ANGLAIS

*A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT*

L'épreuve obligatoire d'anglais de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé informatiquement.

- 1) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un stylo à encre foncée : bleue ou noire et à bille ou feutre. Vous devez **cocher ou noircir** complètement la case en vue de la lecture informatisée de votre QCM.
- 2) Utilisez le sujet comme brouillon (ou les feuilles de brouillons qui vous sont fournies à la demande par la surveillante qui s'occupe de votre rangée) et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.
- 3) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté informatiquement et de ne pas être corrigé.
- 4) Si vous voulez corriger votre réponse, **n'utilisez pas de correcteur** mais indiquez la nouvelle réponse sur la ligne de repentir.
- 5) Cette épreuve comporte 80 questions. Vous devez donc porter vos réponses sur les lignes numérotées de 1 à 80. Veillez à bien porter vos réponses sur la ligne correspondant au numéro de la question.

Pour chaque ligne numérotée de 1 à 80, vous vous trouvez en face de 2 possibilités :

- ▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question, *la ligne correspondante doit rester vierge.*
- ▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse : *vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D, E*

**Complétez les phrases à l'aide des mots ou groupes de mots proposés.**

- 1) American actress Nadia Jones has spent the past few weeks ..... the movie in various locations around the East End of London in the eight-week-long shoot.  
A) filming      B) to film      C) in film      D) has filmed      E) filmed
- 2) Every day, millions of ..... of soap and half-used bottles of shampoo are discarded in hotel shower trays around the world.  
A) blocks      B) bunches      C) bricks      D) bars      E) boxes
- 3) Eating is a ..... part of going on a cruise ship, and the Silver Muse has eight restaurants, three of which are outdoors, with 26 menus between them.  
A) long      B) narrow      C) wide      D) large      E) deep
- 4) A young British computer expert credited ..... cracking the WannaCry cyber-attack has said he does not consider himself a hero but fights malware because "it's the right thing to do".  
A) as      B) to      C) in      D) with      E) of
- 5) The Health Ministry said efforts to control the mosquitoes that spread Zika would continue ..... would assistance to affected families.  
A) as      B) so      C) to      D) of      E) with
- 6) Yesterday, the ..... of the devastation unleashed by the explosion was becoming clear.  
A) note      B) weight      C) measure      D) scope      E) scale
- 7) An on-call paramedic saved his own life when he diagnosed he ..... a heart attack and drove himself to hospital in rural Victoria, Australia.  
A) will have      B) has      C) have      D) has had      E) was having
- 8) Plans are ..... to relocate the capital of Indonesia, as a drastic solution to reports that the sprawling metropolis of Jakarta, already plagued by traffic jams, is also sinking.  
A) alien      B) afoot      C) ahead      D) ahoy      E) aligned
- 9) Facebook has been forced to apologise after the social media giant was found ..... children to determine if they were emotionally vulnerable.  
A) studying      B) studied      C) study      D) had studied      E) would have studied
- 10) China has consistently called ..... an end to North Korea's nuclear weapons programme, but says it opposes unilateral sanctions imposed without a UN mandate.  
A) with      B) over      C) in      D) out      E) for

**Tournez la page S.V.P.**

- 11) The next election is not due until 2019, but continued poor polling could .....Turnbull's leadership.
- A) pick      B) guess      C) estimate      D) underline      E) undermine
- 12) Police in Australia's Outback have arrested a 12-year-old boy who was almost a third of his way towards driving solo ..... the country.
- A) across      B) through      C) along      D) over      E) below
- 13) A British woman was saved from a shark attack when her husband punched the fish to ..... it away.
- A) sweep      B) scare      C) afraid      D) fright      E) brush
- 14) Chicken Kiev was one of the most iconic foods of the 1970s, but ..... of fashion by the late 1980s with the rise of glamorous nouvelle cuisine.
- A) shut out      B) fell out      C) drooped out      D) cut out      E) stormed out
- 15) The I-5 F-4 satellite is to join three other Inmarsat satellites orbiting Earth and will help ..... its Global Xpress mobile broadband network.
- A) of expand      B) have expanded      C) expanded      D) expanding      E) expand
- 16) The two California firms ..... to work together on pilot projects with the aim of making mainstream self-driving technology.
- A) are agree      B) are agreed      C) have agreed      D) agree      E) to agree
- 17) Australia plans to ..... its citizenship rules to require higher English language skills, longer residency and evidence of integration, such as a job.
- A) open      B) loosen      C) harden      D) soften      E) tighten
- 18) Since January 2016, four men have been shot ..... in Liverpool with two of the incidents taking place this year.
- A) dead      B) fatal      C) lethal      D) dying      E) deaden
- 19) Research shows how honeybees use their hairy legs to ..... pollen from their hairy eyes.
- A) handle      B) dust      C) feather      D) tackle      E) swept
- 20) The prelude to the Brexit negotiations is over and we now move into a second, more challenging ..... crucial phase for Ireland.
- A) but      B) boiling      C) because      D) belated      E) breaking

Lisez le texte suivant. Complétez chaque blanc à l'aide des mots ou groupes de mots proposés à la fin du texte.

## Robots could replace 250,000 UK public sector workers

Almost 250,000 public sector workers could lose their jobs to robots over the next 15 years, according to a new report which (21) ..... machines would be more efficient and save billions of pounds.

"Reform", a right-of-centre thinktank, says websites and artificial intelligence "chat bots" could replace up to 90% of Whitehall's administrators, as well as tens of (22) ..... in the NHS and GPs' surgeries, by 2030.

Even nurses and doctors could (23)..... victim to the march of the machines, which the report says can outperform humans at some diagnoses and routine surgical procedures, and are more efficient at collecting information.

The report (24) ..... that public services should become more flexible by embracing a gig economy where workers support themselves through a variety of flexible jobs acquired through online platforms.

In remarks that seem (25)..... infuriate unions, a Reform press release says: "Public services can become the next Uber, using the gig economy to employ locum doctors and supply teachers".

- |    |             |               |             |             |             |
|----|-------------|---------------|-------------|-------------|-------------|
| 21 | A) cries    | B) pretends   | C) shouts   | D) claims   | E) demands  |
| 22 | A) millions | B) thousands  | C) tens     | D) hundreds | E) billions |
| 23 | A) fall     | B) drop       | C) throw    | D) catch    | E) descend  |
| 24 | A) say      | B) rows       | C) argues   | D) denies   | E) suggest  |
| 25 | A) take on  | B) pull up to | C) catch up | D) iron out | E) set to   |

**Tournez la page S.V.P.**

Lisez le texte suivant. Complétez chaque blanc à l'aide des mots ou groupes de mots proposés à la fin du texte.

## Should I take a short nap?

If you're (26) ..... while you're reading this you are either already bored or tired. And if you're tired, you're also likely to feel frustrated, impulsive and a bit miserable.

A study of 40 volunteers, aged between 18 and 50, who'd all had the same average amount of sleep found that those who had an hour's afternoon nap spent (27) ..... on an impossible task without getting frustrated than those who didn't nap. What this translates to in ordinary life is that napping not only reduces tiredness, but the impulsive decision-making and short-temperedness that goes along with it.

Naps commonly last between 30 and 90 minutes and it's estimated that regular naps are taken by between a third to two-thirds of people worldwide. Even a brief nap of 7 to 10 minutes can have immediate benefits lasting (28) ..... to three hours. However, longer naps, of two hours, can lead to sleep inertia producing feelings of disorientation, especially if you had a high sleep "debt" before you nodded off. Between 1pm and 4pm is the time most conducive to napping.

A review of napping in pilots found that those who took naps during the cruising phase of long-haul flights improved their alertness and performance. Fatigue in pilots can manifest itself in (29) ..... reaction times and reduced awareness of peripheral vision. One review article in "Sleep Medicine" did find a relationship between daytime napping and an increased risk of dying from any cause but the authors point out that sick people are more likely to take daytime naps anyway, so don't let this (30) ..... you off. It's more of a concern that you'll snore or dribble in front of colleagues.

- 26    A) yawning      B) snoozing      C) sneezing      D) coughing      E) scratching
- 27    A) younger      B) longer      C) wider      D) lower      E) higher
- 28    A) in and out      B) in      C) down      D) up      E) upcoming
- 29    A) slighter      B) poorer      C) smoother      D) rougher      E) tougher
- 30    A) put      B) send      C) take      D) throw      E) pull

**Complétez les phrases à l'aide des mots ou groupes de mots proposés**

- 31) Regular exercise, including daily brisk ....., is associated with a lower risk of several cancers and with lower risks of tumor recurrence.  
A) to walk      B) a walk      C) walk      D) walking      E) walked
- 32) An ..... number of young children and babies are developing cavities and decay at a very early age.  
A) awfully      B) alarming      C) uniform      D) high      E) increase
- 33) Ireland is now the second most expensive country in Europe for consumer goods and services, ..... to Eurostat.  
A) saying      B) according      C) telling      D) narrating      E) recounting
- 34) The son of teachers, Ross Noble, turned to performance at about the same time that he was diagnosed ..... dyslexia.  
A) to      B) having      C) of      D) have      E) with
- 35) Often in poorer countries girls' education, especially secondary education, is just not seen as a ..... issue.  
A) pressing      B) squeezing      C) squashing      D) stirring      E) trying
- 36) The Pentagon said the sale of jets ..... increase security cooperation between the US and Qatar.  
A) had      B) have      C) would      D) be      E) to
- 37) Few people on Earth would probably feel ..... at home as will Trump, amid the Buckingham Palace gilt.  
A) as      B) so      C) such      D) such as      E) so as
- 38) The Library of Congress is ..... to many thousands of film stills and behind-the-scenes photos, but not all of them have complete details of origin.  
A) area      B) home      C) place      D) flat      E) house
- 39) Hot air pushing up from France could ..... higher temperatures in the UK.  
A) snigger      B) swagger      C) rigger      D) trigger      E) digger
- 40) McDonald's may ..... over all of us like a capitalist titan, but every empire has its humble beginnings.  
A) zoom      B) bloom      C) doom      D) boom      E) loom

**Tournez la page S.V.P.**

Lisez le texte suivant. Complétez chaque blanc à l'aide des mots ou groupes de mots proposés à la fin du texte.

## Elderly care: a depressingly predictable crisis

Perhaps the only thing more depressing than the Care Quality Commission's assessment of the poor condition of elderly care is how predictable this dismal situation was. (41) .....the scale of the problem revealed in today's report is striking and troubling, there is something wearily familiar about the conclusion that there is a fundamental problem with the provision of services to care for people in their later years.

Politicians and other policymakers have been (42) ..... aware for a long time that the care sector is in a poor and worsening condition. They have been equally aware of how baleful the consequences of a failing care sector are, both for the individuals denied the dignity and comfort they deserve and for the National Health Service that is too often left to (43) ..... people failed by the care system. Dealing with older people who should be taken care of elsewhere is a major cause of the turmoil in A&E departments observed by the CQC.

Even (44) ..... our leaders have known about the coming crisis in elderly care, they have done little to prevent it, and have sometimes knowingly made it worse. When George Osborne last year announced steep rises in the minimum wage, he was immediately warned that this would increase costs for care homes and help force some out of business. He went (45) ..... anyway.

Theresa May, who has often shown rather more (46) ..... sense than Mr Osborne, might well consider ways she could repair the damage done to care home providers by that policy.

But the root causes of the care crisis go much deeper, and will require much more than a temporary fix in the form of financial support (47) ..... for operators or the councils that fund the majority of residential care. What is needed is a concerted effort to properly integrate the NHS and the care sector, and to (48) ..... the funding of both. Our rising lifespans should be celebrated, but they also make our current approach of trying to fund health and social care almost entirely from general taxation unsustainable.

It is time for politicians to grasp the nettle and (49) ..... options including a social insurance scheme and private payments for health care, the greater use of private insurance policies to fund care for the elderly and the possibility of care costs being collected from estates after death. None will be politically easy but without political courage the disaster that (50)..... is all too easy to predict.

- 41 A) Which B) While C) What D) Whether E) Wishful
- 42 A) adamantly B) roughly C) spritely D) brightly E) fully
- 43 A) look after B) look up C) look up to D) look for E) look away
- 44 A) thorough B) though C) throughout D) thought E) thoughtful
- 45 A) onward B) ahead C) direct D) astray E) headlong
- 46 A) vulgar B) common C) shared D) joint E) collective
- 47 A) such B) so C) or D) nor E) either
- 48 A) outrage B) outdate C) outstand D) oversight E) overhaul
- 49 A) chain B) discover C) explore D) render E) hold
- 50 A) hides B) wanders C) awaits D) hidden E) widens

Lisez le texte suivant. Complétez chaque blanc à l'aide des mots ou groupes de mots proposés à la fin du texte.

## Find fun where you least expect it

People who advocate "having more fun" in life are, generally speaking, the kind of people you want to punch. They're the David Brent like bosses who make everyone do excruciating icebreaker exercises on office awaydays; they're the train guards and cabin (51) ..... who mistakenly believe all passengers love it when they do silly voices. One especially annoying technology trend, "gamification", tries to turn (52) ..... tasks into games with points and prizes, so that your trip to the gym becomes a "fitness quest", or housework a matter of fighting "chore wars" with your spouse. In my experience, these efforts to add a cheesy overlay of fun always fail, not (53) ..... because they're a constant reminder that the underlying activity is so boring. If it weren't, why would you be trying so hard to make it fun in the first place?

The American game designer and critic Ian Bogost wouldn't dispute the cringeworthiness of this enforced jollity, but the real problem, he argues in a new book, *Play Anything*, is that we don't understand the nature of fun. We imagine that the way to (54) ..... life's tedium is to escape from it, or try to pretend it's not happening. But true fun involves diving in and "taking the world at face value", embracing the situation you're in, not pushing it away, and grappling with its built-in constraints. Bogost recalls dragging his four-year-old daughter through a crowded shopping mall, faster than her legs (55) ..... carry her, and noticing that she was pulling against him, slowing down so that her feet never touched the cracks between floor (56)....., a familiar children's game, made more challenging by her father's forward propulsion. She hadn't chosen her situation, but by creatively exploiting its limitations, she turned it into a playground.

All of which goes to show that external constraints aren't antithetical to fun, but (57)..... a precondition of it: a game with no limiting rules is no game at all. One curious consequence of this is that fun isn't always, or even usually, pleasurable. Ask any serious player of chess, golf or video games, and they'll concede it's often a struggle, otherwise, why (58) ..... playing? Fun, from this perspective, isn't a matter of enjoying yourself in the moment, but of looking back with satisfaction at having found creative new possibilities in whatever constraints you're facing.

(59) ....., *Play Anything* isn't really just an argument for turning dull tasks into games. It's a manifesto for a different attitude to the world. We're constantly trying to deal with the bits of everyday life we dislike by changing them, or changing ourselves. But what if we saw them with fresh eyes, as collections of constraints, like the rules of a game, and then asked what "moves" they might make possible? You might not enjoy them more. Yet, (60) ....., you'll probably have more fun.

- 51 A) men B) cargo C) flights D) crew E) people
- 52 A) moist B) Monday C) mild D) mundane E) meek
- 53 A) lesser B) less C) latest D) last E) least
- 54 A) relief B) relieve C) sigh D) sign E) signal
- 55 A) could B) should C) shall D) will E) was
- 56 A) ceramics B) tiles C) paper D) cement E) bricks
- 57 A) additional B) closer C) prefer D) rather E) further
- 58 A) determine B) fight C) struggle D) effort E) bother
- 59 A) Still B) Often C) Not D) Mind E) Always
- 60 A) slyly B) slowly C) strongly D) strangely E) shrewdly

Lisez le texte suivant. Complétez chaque blanc à l'aide des mots ou groupes de mots proposés à la fin du texte.

## Get real: why analogue refuses to die

I realise everyone's desperate for good news these days, but even so, there was something (61) ..... about the elation that greeted reports of the relaunch of the Nokia 3310 phone. (You know the one: that iconic plastic brick with 12 pressable buttons, and a screen you couldn't crack.) No doubt (62) ..... this was simple nostalgia. But it was also because the 3310 "just worked".

You hear that phrase so often these days, (63) ..... of some old-fashioned bit of tech, that it's easy to forget how strange it is: why would there ever be a market for gadgets that *didn't* just work? Yet many don't. Apple's fingerprint recognition doesn't really work. Nor does autocorrect. Few smartphone batteries work, if "works" implies a long day's use. And why do we tolerate iPhones not (64) ..... waterproof?

The 3310, being digital, has no place in David Sax's new book, "The Revenge Of Analog: Real Things And Why They Matter". But the fondness for it echoes the trend he documents. In all sorts of industries, Sax shows, analogue products (65) ..... a comeback. Vinyl records are (66) ..... , paper books are still way more popular than ebooks; and every startup founder he interviewed seemed to be carrying a Moleskine notebook. More than (67) ..... hipsterism, this is an appreciation for devices that do less. Unlike a tablet, a book can't tempt you to click away to something else during the slower bits. It's harder to rephrase things in a Moleskine than in Microsoft Word, so you stop second-guessing yourself and keep writing.

Analogue, in short, demands that you make a decision to read this one book, write this sentence, take this photo, while digital keeps (68) ..... us on with the promise of perfection and infinite choice. So it's not just that Apple hasn't got fingerprint recognition right just yet; it's that the trajectory it's on, toward a device that does everything perfectly, is unattainable, and (69) ..... doomed never to satisfy.

Lurking behind all this is the fact that while we tend to believe we live in a "materialistic" society, we are, in the words of sociologist Juliet Schor, "not at all material enough". In fact, she writes, "we have very low standards for what physical objects we trade our money for, and for the quality of the sensory experiences they provide." We live more and more in the world of the abstract thanks to the internet and the (70) ..... of branding, which unfortunately sells promises of happiness and attractiveness.

- 61 A) startling B) sparkling C) tinkling D) trickling E) twinkling
- 62 A) apart B) part C) a part of D) parting E) partly
- 63 A) in praise B) praise C) praising D) to praise E) by praise
- 64 A) was B) were C) are D) to be E) being
- 65 A) make B) will make C) would make D) would have made E) are making
- 66 A) upgrade B) on the up C) upside down D) upper E) upbeat
- 67 A) less B) more C) mere D) mare E) mind
- 68 A) trying B) telling C) calling D) luring E) sending
- 69 A) that B) these C) thou D) this E) thus
- 70 A) raise B) rise C) risen D) rose E) rife

Lisez le texte suivant. Complétez chaque blanc à l'aide des mots ou groupes de mots proposés à la fin du texte.

## Unique coral reef at risk of damage if oil spills near Amazon River

Oil companies planning to drill near a vast coral reef at the mouth of the Amazon River have calculated that the unique ecosystem has a 30% (71)..... of being affected in the event of an oil spill.

The unique reef system astonished marine biologists when its existence was (72)..... revealed last year, and is believed it could be the home for dozens of previously unknown species. But activists warn that an oil spill could irreparably damage the 1,000 kilometre-long ecosystem before scientists have even had a chance to study it.

"It's unlike any other reef that we know about," said Sara Ayeche, an oil campaigner at the London offices of Greenpeace. "If the companies drill there's a risk of an oil spill and if an oil spill hits the reef, then we (73) ..... parts of it destroyed before we even document them."

In January, Total said it had begun moving (74)..... to the Amazon area and planned to start drilling this year. The oil reservoirs it hopes to reach are situated in 1,900 metres of water, nearly 200 kilometres from the coast. Scientists from Greenpeace examined the publicly-available "Environmental Impact Study" Total submitted to the Brazilian authorities and found references to the possibility of an oil spill (75).....the reef.

Reef structures in the area to be drilled "present possibilities of being impacted by oil". In winter that possibility could be as high as 30.33%, (76)..... in summer, 20.93%, the study said.

As long (77) ..... as the 1970s, scientists suspected the existence of a reef hidden under the murky waters of the River Amazon's mouth. But it was not until 2012 that they confirmed the system existed, in conditions coral reefs are not commonly found.

Last year a paper in Science said there were 61 species of sponge (78) ..... in the extensive reef system. Earlier this year scientists were able to film the reef from a Greenpeace ship for the first time.

"Scientists are calling it a new biome. And scientists think that there are potentially new species there but they need time to document them," said Ayeche.

In May, prosecutors in the State of Amapá asked Brazil's government environment agency Ibama (79) ..... oil exploration and reopen the environmental licensing process.

"The data offered by the company does not provide enough security for the environmental licensing to proceed," prosecutor Joaquim Cabral told the Guardian in an email. Ibama said in an email, it had asked for additional information which it was studying and has (80)..... to grant the licence.

- 71 A) spark B) luck C) chance D) opportunity E) occasion
- 72 A) widely B) highly C) extremely D) strongly E) purely
- 73 A) have seen B) to see C) saw D) seen E) could see
- 74 A) damages B) equipment C) equipments D) luggage E) baggage
- 75 A) will reach B) to reach C) reaching D) reach E) could reach
- 76 A) still B) during C) where D) when E) while
- 77 A) while B) ago C) far D) awhile E) length
- 78 A) alone B) lonely C) solo D) solitude E) single
- 79 A) had suspended B) suspend C) suspending D) to suspend E) have suspended
- 80 A) during B) ago C) which D) for E) yet

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

Session 2019

CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT  
D'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE



**ÉPREUVE FACULTATIVE  
D'ESPAGNOL**

Durée : 1 heure

Coefficient : Bonus



Cette épreuve comporte :

- 1 page de garde recto
- 1 page de consignes recto
- 1 page de texte et questions recto

**TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT  
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)**

**ÉPREUVE FACULTATIVE D'ESPAGNOL**

- 1) Vous devez composer lisiblement sur les copies avec un stylo à encre foncée : bleue ou noire et à bille ou feutre.
- 2) Les effaceurs correcteurs (comme le tippex) sont interdits car ils peuvent laisser des résidus sur les vitres du scanner lors de la numérisation des copies.
- 3) Numéroté chaque page de composition pour faciliter la correction de la copie (il n'est pas nécessaire de numéroté les pages entièrement blanches) dans la zone prévue en bas à droite de chaque copie.

Par exemple, pour la 6<sup>ème</sup> page d'une copie comportant 7 pages de composition et une page blanche, numéroté ainsi pour la page 6 sur 7 :

6/7

- 4) Vous devez composer uniquement sur les supports de composition officiels pour l'épreuve.
- 5) Aucun brouillon ne sera ramassé avec les copies

## Respetando el trabajo

Dice el poeta Rabindranath Tagore : « Me quedé dormido y me pareció que la vida era alegría. Desperté y descubrí que la vida era deber. Cumplí con mi deber y descubrí que en él estaba la alegría ».

En realidad, a través de mi trabajo descubro la vida, llevo a las personas y conozco todo lo que ocurre a mi alrededor. La única trampa ante la que debo estar atento es la de pensar que todos los días son idénticos. Lo cierto es que toda mañana trae consigo un milagro escondido, y tenemos que prestarle la debida atención a este milagro.

« Deber » es una palabra misteriosa que puede tener dos significados opuestos : la ausencia de entusiasmo o la comprensión de que necesitamos compartir nuestro amor con más de una persona.

En el primer caso, nos pasamos la vida excusándonos ante nosotros mismos para no aceptar nuestra responsabilidad. En el segundo caso, el deber se transforma en una especie de devoción, de amor incondicional por el ser humano y pasamos a luchar por lo que queremos que suceda.....

¿Por qué uno de los mayores sueños de muchos seres humanos es dejar de trabajar algún día ? Porque no les gusta lo que hacen. Si les gustase, pedirían a los cielos poder conservar la salud y el entusiasmo necesarios para poder, aunque fuese el último día de sus vidas, despertarse aquella mañana y hacer algo útil para ellos mismos, para sus familias o para cualquier otro ser humano....

El trabajo es como la naturaleza, refleja la energía que le transmites.

No existe ninguna labor miserable. Si, de todas formas, no estás satisfecho, asume el riesgo de cambiarlo todo y dedicarte a lo que más amas. Es preferible ser alegre con un pequeño salario a ser infeliz por el miedo al cambio.

Texto de Paulo Coelho. Revista semanal

### **Preguntas :**

- 1.- Traduzca en francés el párrafo 2. Desde « En realidad, a través de mi trabajo..... » hasta « la debida atención a este milagro ». (5 puntos)
- 2.- Transcriba el párrafo 5 poniendo los verbos en pasado. Desde « ¿Por qué uno de los mayores sueños... » hasta « para cualquier otro ser humano.. ». (5 puntos)
- 3.- Comente el documento (unas 100 palabras) (10 puntos)

CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT  
D'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE



**ÉPREUVE OBLIGATOIRE À OPTION**  
**MATHÉMATIQUES**

Durée : 4 heures

Coefficient : 3



Cette épreuve comporte :

- 1 page de garde recto
- 2 pages de consignes recto-verso
- 1 page d'avertissements recto
- 13 pages de texte recto-verso

**TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT  
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)**

## ÉPREUVE OBLIGATOIRE A OPTION DE MATHÉMATIQUES

## A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve obligatoire à option de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé informatiquement.

- 1) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un stylo à encre foncée : bleue ou noire et à bille ou feutre. Vous devez **cocher ou noircir** complètement la case en vue de la lecture informatisée de votre QCM.
- 2) Utilisez le sujet comme brouillon (ou les feuilles de brouillons qui vous sont fournies à la demande par la surveillante qui s'occupe de votre rangée) et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.
- 3) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté informatiquement et de ne pas être corrigé.
- 4) Si vous voulez corriger votre réponse, **n'utilisez pas de correcteur** mais indiquez la nouvelle réponse sur la ligne de repentir.
- 5) Cette épreuve comporte 40 questions obligatoires, **certaines, de numéros consécutifs, peuvent être liées. La liste de ces questions est donnée sur la page d'avertissements.**

**Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.**

- 6) A chaque question numérotée entre 1 et 40, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 41 à 80 seront neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.

Pour chaque ligne numérotée de 1 à 40, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

- ▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question, *la ligne correspondante doit rester vierge.*
- ▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse : *vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.*
- ▶ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes : *vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et deux seulement.*
- ▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne : *vous devez alors noircir la case E.*

**Attention, toute réponse fausse peut entraîner pour la question correspondante une pénalité dans la note.**

**Tournez la page S.V.P.**

7) EXEMPLES DE RÉPONSES :

Question 1 :  $1^2 + 2^2$  vaut :

- A) 3                  B) 5                  C) 4                  D) -1

Question 2 : le produit  $(-1) (-3)$  vaut :

- A) -3                  B) -1                  C) 4                  D) 0

Question 3 : Une racine de l'équation  $x^2 - 1 = 0$  est :

- A) 1                  B) 0                  C) -1                  D) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :

	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
1 -	A	B	C	D	E
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
2 -	A	B	C	D	E
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3 -	A	B	C	D	E
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

# AVERTISSEMENTS

Questions liées :

1 à 11

12 à 22

23 à 34

35 à 40

## Première partie : polynômes de Tchebychev

On note  $E$  l'espace vectoriel des applications continues de  $[-1,1]$  dans  $\mathbb{R}$ .

On désigne par  $E_n$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de  $[-1,1]$  dans  $\mathbb{R}$  de degré inférieur ou égal à  $n$  où  $n$  est un entier naturel.

On pourra confondre les expressions : polynôme et fonction polynomiale.

Si  $f$  est un élément de  $E$ , on pose :  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|$ .

1. Si  $f$  est un élément de  $E$ , on pose  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|$ .

A)  $\|f\|_\infty$  existe car la fonction  $f$  est polynomiale sur l'intervalle  $[-1,1]$ .

B)  $\|f\|_\infty$  existe car  $\{|f(x)|, x \in [-1,1]\}$  est une partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$ .

C) Le réel  $\sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|$  existe et est atteint.

D) Le réel  $\sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|$  existe mais n'est pas nécessairement atteint.

2. On a :

A) Toute application linéaire de  $E$  muni de la norme infinie  $\|\cdot\|_\infty$  vers  $\mathbb{R}$  est continue.

B) On définit une norme sur  $E$  en posant :  $\|f\|_1 = \int_{-1}^1 f(x) dx$ .

C) Toutes les normes sur  $E$  sont équivalentes.

D) On définit une norme sur  $E_n$  en posant :  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|$ .

3. On a :

A) Il existe au plus un polynôme  $T$  à coefficients réels de degré  $n$  vérifiant  $\forall \theta \in \mathbb{R}, T(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ .

B)  $\cos(\theta)$  est la partie réelle de  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$ .

C) Un polynôme  $T$  vérifiant  $\forall \theta \in \mathbb{R}, T(\cos \theta) = \cos(n\theta)$  est donné par :

$$T(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{2k} x^{n-2k} (1-x^2)^k.$$

D) Un polynôme  $T$  vérifiant  $\forall \theta \in \mathbb{R}, T(\cos \theta) = \cos(n\theta)$  est donné par :

$$T(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{2k} x^{n-2k} (1-x)^k.$$

On définit alors une fonction polynomiale sur  $[-1,1]$  par :

$$\forall x \in [-1,1], T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

4. On a :

A)  $\forall x \in [-1,1], T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) + T_n(x).$

B)  $\forall x \in [-1,1], T_{n+2}(x) = 2T_{n+1}(x) - T_n(x).$

C)  $\forall x \in [-1,1], T_{n+2}(x) = 2T_{n+1}(x) + T_n(x).$

D)  $\forall x \in [-1,1], T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$

5. On a :

A)  $T_0(x) = x.$

B)  $T_1(x) = x.$

C)  $T_n(x) = nx.$

D) Le coefficient dominant de  $T_n$  est  $2^n$ .

6. On a :

A) Le polynôme  $T_n$  admet  $n-1$  racines.

B) Pour  $k$  entier compris entre 0 et  $n-1$ ,  $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$  sont des racines de  $T_n$ .

C) Pour  $k$  entier compris entre 0 et  $n-1$ ,  $\cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$  sont les racines de  $T_n$ .

D)  $\forall x \in [-1,1], \forall n \geq 1, T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x - \cos \theta_k)$  où  $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ .

7. On pose pour  $\forall k \in \{0,1,\dots,n\}$ ,  $c_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ .

A)  $\|T_n\|_{\infty} = 1.$

B)  $\|T_n\|_{\infty} = n.$

C)  $\forall k \in \{0,1,\dots,n\}, |T_n(c_k)| = \|T_n\|_{\infty}.$

D)  $\forall k \in \{0,1,\dots,n-1\}, T_n(c_{k+1}) = T_n(c_k).$

8. Pour toute fonction  $h$  de  $E$ , l'application  $g : t \mapsto \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$  est intégrable sur

$] -1, 1[$  car :

- A) La fonction  $h$  est continue sur  $] -1, 1[$ .
- B) La fonction  $g$  est prolongeable par continuité sur  $[-1, 1]$ .
- C) La fonction  $g$  est positive sur  $] -1, 1[$ .
- D)  $\lim_{t \rightarrow \pm 1} \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}} = 0$ .

9. Pour  $f$  et  $g$  éléments de  $E$ , on pose  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(t) g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ .

- A) On définit ainsi un produit scalaire sur  $E$ .
- B)  $\langle f, g \rangle = 0$  entraîne que l'une des fonctions  $f$  ou  $g$  est nulle.
- C) L'application  $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(t) g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$  est linéaire.
- D) L'application  $f \mapsto \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(t) g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$  est linéaire.

10. On a, pour  $a$  et  $b$  réels :

- A)  $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \cos(a+b)]$
- B)  $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$
- C)  $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$
- D)  $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$

11. On a :

- A) Pour tout couple d'entiers naturels  $(n, m)$ ,  $\langle T_n, T_m \rangle = \int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta$ .
- B) Pour tout couple d'entiers naturels  $(n, m)$ ,  $\langle T_n, T_m \rangle = 0$ .
- C) La famille  $(T_0, T_1, \dots, T_n)$  est une base orthogonale (pour  $\langle , \rangle$ ) de  $E_n$ .
- D) La famille  $(T_0, T_1, \dots, T_n)$  est une base orthonormée (pour  $\langle , \rangle$ ) de  $E_n$ .

## Deuxième partie : comparaison de convergences d'une série de fonctions

Dans cette partie on s'intéresse aux comparaisons de convergences pour des séries de fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs réelles.

12. On a :

- A) Une série de fonctions qui converge uniformément sur l'intervalle  $I$  converge absolument en tout point de  $I$ .
- B) Une série de fonctions qui converge absolument en tout point de  $I$  converge uniformément sur  $I$ .
- C) Une série de fonctions qui ne converge pas normalement sur l'intervalle  $I$ , ne converge pas absolument sur l'intervalle  $I$ .
- D) Une série de fonctions qui converge uniformément sur tout segment inclus dans l'intervalle  $I$  converge uniformément sur l'intervalle  $I$ .

13. La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformément sur  $I$  lorsque :

A) La série de fonctions  $\sum_{n > 0} f_n$  converge simplement sur  $I$  et la suite de ses restes converge simplement vers la fonction nulle.

B) Les fonctions  $f_n$  sont bornées à partir d'un certain rang  $p$  et la série

$$\sum_{n > p} \|f_n\|_{\infty} \text{ converge.}$$

C) La suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $I$ .

D) Il existe une suite  $(\alpha_n)$  qui ne dépend pas de  $x$  et qui converge vers 0 telle que pour tout  $x \in I$ ,  $|f_n(x)| \leq \alpha_n$ .

14. La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  ne converge pas uniformément sur  $I$  lorsque :

A) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  ne converge pas normalement sur  $I$ .

B) La suite de fonctions  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur  $I$ .

C) On peut trouver un réel  $a$  adhérent à l'intervalle  $I$  tel que  $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = b_n$  avec

la série  $\sum_{n \geq 0} b_n$  qui diverge.

D) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  ne converge pas absolument sur  $I$ .

15. Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  une série entière de la variable réelle et de rayon de convergence  $R \neq 0$  on a :

A) La série  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  converge uniformément sur l'intervalle  $] -R, R[$ .

B) La série  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  converge normalement sur l'intervalle  $] -R, R[$ .

C) La série  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  converge uniformément sur le compact  $[-R, R]$ .

D) La série  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  converge absolument en tout point de l'intervalle  $[-R, R]$ .

16. Dans cette question, on pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ .

A) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  est une série entière.

B) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge normalement sur l'intervalle  $] -1, 1[$ .

C) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformément sur l'intervalle  $] -1, 1[$ .

D) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformément sur tout compact inclus dans l'intervalle  $] -1, 1[$ .

17. Dans cette question, on pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ .

A) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .

B) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge normalement sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .

C) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge normalement sur tout compact inclus dans l'intervalle  $[0, +\infty[$ .

D) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformément sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .

18. Dans cette question, on pose, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}.$$

A) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

B) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n'$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$   
( $f_n'$  est la dérivée de la fonction  $f_n$ ).

C) En général, si une série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur un intervalle  $I$  et si la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformément sur  $I$  alors la série  $\sum_{n \geq 1} f_n'$  converge uniformément sur  $I$ .

D) En général, si une série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur un intervalle  $I$  et si la série  $\sum_{n \geq 1} f_n'$  converge uniformément sur  $I$  alors la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformément sur  $I$ .

19. Dans cette question, on pose, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$f_n(x) = \frac{1}{1+n^2 x^2} \text{ et } g_n(x) = \frac{x^2}{1+n^2 x^2}$$

A) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .

B) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformément sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

C) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .

D) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

20. On pose  $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  et pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$ .

On a :

A)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

B)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

C)  $f(x)$  est équivalent à  $\frac{A}{x^2}$  au voisinage de  $+\infty$ .

D)  $f(x)$  est équivalent à  $Ax^2$  au voisinage de  $+\infty$ .

21. Dans cette question, on pose, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}.$$

A) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformément sur l'intervalle  $[0,1]$ .

B) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement sur l'intervalle  $[0,1]$ .

C) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement en tout  $x$  de l'intervalle  $[0,1]$ .

D) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge absolument en tout  $x$  de l'intervalle  $[0,1]$ .

22. Dans cette question, on pose, pour tout entier naturel  $n \geq 2$ ,  $f_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{\ln n}$ .

On pose pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ .

- A) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge normalement sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
- B) Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $|R_n(x)| \leq \frac{x e^{-(n+1)x}}{\ln(n+1)}$ .
- C) Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $|R_n(x)| \leq \frac{x}{(e^x - 1) \ln n}$ .
- D) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformément sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

### Troisième partie : polynôme minimal d'une matrice

**Dans toute cette partie**,  $A$  est une matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  avec  $n \geq 2$ , on notera  $\chi_A$  son polynôme caractéristique et  $\pi_A$  son polynôme minimal.

On rappelle que  $\pi_A$  est un polynôme annulateur de la matrice  $A$  et que si  $P$  est un autre polynôme annulateur de  $A$  alors  $\pi_A$  divise  $P$ .

23. On a :

- A)  $\pi_A$  est un polynôme de degré supérieur ou égal à 1.
- B) Si la matrice  $A$  est non nulle, son polynôme minimal  $\pi_A$  est de degré supérieur ou égal à 2.
- C) Si le degré de  $\pi_A$  est supérieur ou égal à 2 alors la matrice  $A$  est non nulle.
- D) Si  $A$  est une matrice scalaire ( $A = kI_n$ ) alors  $\pi_A$  est de degré 0.

24. On a :

- A) Si  $A$  est la matrice d'un projecteur,  $\pi_A = X^2 - X$ .
- B) Si  $\pi_A = X^2 - X$  alors  $A$  est la matrice d'un projecteur.
- C) Si  $A$  est la matrice d'une symétrie vectorielle,  $\pi_A = X^2 - 1$ .
- D) Si  $\pi_A = X^2 - 1$  alors  $A$  est la matrice d'une symétrie vectorielle.

25. On a :

- A) L'ensemble des racines d'un polynôme annulateur de  $A$  est l'ensemble des racines de  $\pi_A$ .
- B) L'ensemble des racines d'un polynôme annulateur de  $A$  est l'ensemble des valeurs propres de la matrice  $A$ .
- C) Les racines des polynômes  $\pi_A$  et  $\chi_A$  sont les mêmes.
- D) Si  $p$  est un entier non nul et si  $\pi_A = X^p$ ,  $A$  est une matrice nilpotente.

26. On a :

- A) Pour que la matrice  $A$  soit diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  il est nécessaire que son polynôme caractéristique soit scindé sur  $\mathbb{R}$  à racines simples.
- B) Pour que la matrice  $A$  soit diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  il suffit que son polynôme minimal soit scindé sur  $\mathbb{R}$  à racines simples.
- C) La matrice  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  si et seulement s'il existe un polynôme scindé sur  $\mathbb{R}$  annulateur de la matrice  $A$ .
- D) Il existe des matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  n'ayant pas de polynôme minimal.

27. On a :

- A) Si  $\pi_A = X^2 + 1$ , nécessairement  $n$  est pair.
- B) Il n'existe pas de matrice  $A$  de  $M_n(\mathbb{R})$  telle que  $\pi_A = X^2 + 1$ .
- C) Si  $\pi_A = X$ , la matrice  $A$  est inversible.
- D) Si la matrice  $A$  est inversible alors le terme constant de  $\pi_A$  est non nul.

28. Dans cette question, on considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

- A)  $\pi_A = (X - 2)^2(X - 4)$ .
- B)  $\pi_A = (X - 2)(X - 4)^2$ .
- C)  $\pi_A = (X - 2)(X - 4)$ .
- D)  $\pi_A = (X - 3)^2(X - 4)$ .

29. Dans cette question, on considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

A)  $\pi_A = (X - 1)^3$ .

B)  $\pi_A = (X - 1)^2$ .

C) La matrice  $A$  est semblable à la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

D) La matrice  $A$  est semblable à la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

30. On a :

A) Le polynôme minimal d'une matrice  $A$  de  $M_n(\mathbb{R})$  est scindé dans  $\mathbb{R}$ .

B) Le polynôme minimal de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  est  $\pi_A = X(X^2 + 1)$ .

C) Le polynôme minimal de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  est  $\pi_A = X(X^2 - 1)$ .

D) L'exponentielle de la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 1 & -\sin 1 \\ 0 & \sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$ .

31. On a :

A) La matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  vérifie :  $\pi_A = \chi_A$ .

B) Si  $A$  est une matrice symétrique réelle,  $\pi_A = \chi_A$ .

C) Si  $A$  est une matrice vérifiant  $\pi_A = \chi_A$  alors  $A$  est inversible.

D) Si  $A$  est une matrice vérifiant  $\pi_A = \chi_A$  alors  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

32. Dans cette question, on considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

- A)  $\pi_A = (X - 2)^2 (X - 3)^2$ .
- B)  $\pi_A = (X - 2)^2 (X - 3)$ .
- C)  $\pi_A = (X - 2) (X - 3)^2$ .
- D)  $\pi_A = (X - 2) (X - 3)$ .

33. Dans cette question, on considère une matrice  $A$  de  $M_4(\mathbb{R})$  de polynôme caractéristique  $\chi_A = (X - 2)(X + 2)^3$ . On a :

- A) Nécessairement  $\pi_A = (X - 2)(X + 2)$ .
- B) Si  $A$  est une matrice diagonalisable, nécessairement  $\pi_A = (X - 2)(X + 2)$ .
- C) Si  $A$  est une matrice diagonalisable, nécessairement  $\pi_A = (X - 2)(X + 2)^3$ .
- D) Il est possible que  $\pi_A = X + 2$ .

34. On a :

- A) Deux matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  semblables ont le même polynôme minimal.
- B) Si deux matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  ont le même polynôme minimal elles sont semblables.
- C) Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  on a  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ .
- D) Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  on a  $\pi_{AB} = \pi_{BA}$ .

### Quatrième partie : exercice de probabilités

On tire au hasard un nombre entier strictement positif.

On suppose que la probabilité d'obtenir  $n$  vaut  $\frac{1}{2^n}$ .

Pour  $k \neq 0$  on note  $A_k$  l'évènement «  $n$  est un multiple de  $k$  ».

35. On a :

A) Pour tout réel  $q \neq 1$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ .

B) Pour tout réel  $q \neq 1$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$ .

C) Pour tout réel  $q \neq 1$ ,  $\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$ .

D) Sachant que la probabilité d'obtenir  $n$  vaut  $\frac{1}{2^n}$   
on définit bien une probabilité sur  $\mathbb{N}^*$ .

36. On a, pour  $k \neq 0$ :

A)  $P(A_k) = \frac{1}{2^{k-1}}$ .

B)  $P(A_k) = \frac{1}{2^k}$ .

C)  $P(A_k) = \frac{1}{2^k - 1}$ .

D)  $P(A_k) = \frac{3}{2^{k-1}}$ .

37. Si  $A$  et  $B$  sont deux événements, on a :

A)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

B) Si  $A$  et  $B$  sont deux événements indépendants,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

C) Si  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$  alors  $A$  et  $B$  sont deux événements indépendants.

D)  $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ .

38. On a :

A)  $P(A_2 \cup A_3) = \frac{63}{29}$ .

B)  $P(A_2 \cup A_3) = \frac{29}{63}$ .

C)  $P(A_2 \cap A_3) = \frac{29}{63}$ .

D)  $P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{63}$ .

39. On note  $B$  l'évènement «  $n$  est un nombre premier ». On a :

A)  $\{2,3,5\} \subset B$ .

B)  $B \subset \{2,3,5\}$ .

C)  $P(B) > \frac{13}{32}$

D)  $P(B) = \frac{1}{32}$ .

40. On note  $B$  l'évènement «  $n$  est un nombre premier ».

On note  $C$  l'évènement  $[A_2 \cup A_3 \cup \{1\}] - \{2,3\}$ . On a :

A)  $C \subset \bar{B}$ .

B)  $B \subset \bar{C}$ .

C)  $P(B) > \frac{1}{2}$ .

D)  $P(B) < \frac{1}{2}$ .

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

SESSION 2019

CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT  
D'INGÉNIEURS DU CÔNTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE



**ÉPREUVE OBLIGATOIRE DE  
FRANÇAIS**

Durée : 4 heures

Coefficient : 2



Cette épreuve comporte :

- 1 page de garde recto
- 1 page de consignes recto
- 4 pages de texte et questions recto-verso

**TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT  
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)**

**ÉPREUVE OBLIGATOIRE DE FRANÇAIS**

- 1) Vous devez composer lisiblement sur les copies avec un stylo à encre foncée : bleue ou noire et à bille ou feutre.
- 2) Les effaceurs correcteurs (comme le tippex) sont interdits car ils peuvent laisser des résidus sur les vitres du scanner lors de la numérisation des copies.
- 3) Numéroté chaque page de composition pour faciliter la correction de la copie (il n'est pas nécessaire de numéroté les pages entièrement blanches) dans la zone prévue en bas à droite de chaque copie.

Par exemple, pour la 6<sup>ème</sup> page d'une copie comportant 7 pages de composition et une page blanche, numéroté ainsi pour la page 6 sur 7 :

6/7

- 4) Vous devez composer uniquement sur les supports de composition officiels pour l'épreuve.
- 5) Aucun brouillon ne sera ramassé avec les copies



1- Vous résumerez ce texte en 210 mots avec une marge de tolérance de dix mots (200-220 mots). Vous indiquerez le nombre de mots à la fin du résumé.

2- Vous analyserez et discuterez cette citation en vous appuyant sur des exemples passés ou présents pour étayer votre réflexion :

***« ... le progrès technique ne s'arrêtera jamais, c'est infini. La durée, c'est autre chose. C'est l'humain. Ce n'est pas infini, l'humain. C'est fragile, c'est limité. »***

#### Critères d'évaluation

Un devoir structuré (une introduction avec des parties distinctes et une conclusion)
Présence d'arguments accompagnés d'exemples précis
Correction de la langue
Qualité de la mise en page
Respect de l'orthographe et de la ponctuation
Lisibilité de l'écriture

*Ce roman d'Agnès Clancier relate la vie de Maryse Bastié, héroïne de l'aviation. Il nous fait découvrir une époque où de Mermoz à Hélène Boucher, des hommes et des femmes, au péril de leur vie, ont laissé des traces dans le ciel ouvrant la voie à l'aviation moderne. Cet extrait se situe à la fin de cette œuvre. Maryse Bastié dresse un bilan de sa vie.*

Ils ne nous laisseront pas plus de place dans ce monde-ci, qu'ils ne l'ont fait dans le passé. Pour qui se prennent-ils ? Lequel d'entre eux serait capable de réaliser ce que nous avons accompli. Combien des records que j'ai battus seraient à leur portée ? Les records de vitesse, bien sûr. Dépassés depuis longtemps. Avec les appareils de maintenant. Mais la durée... La durée, ils ne risquent pas. Presque trente-huit heures, seule, dans un avion. La plupart n'atteindrait même pas la moitié. Ils font semblant d'avoir oublié. C'est vieux, tout ça, cela n'a plus de sens, aujourd'hui. Il n'y a plus que la vitesse. La vitesse, ce sont les machines, la technologie, la mécanique, les moteurs, on peut sans cesse aller plus vite, les perfectionner encore, **le progrès technique ne s'arrêtera jamais, c'est infini. La durée, c'est autre chose. C'est l'humain. Ce n'est pas infini, l'humain. C'est fragile, c'est limité.** Il fallait la connaître, cette limite de l'humain. Il fallait y aller. Aller au bout. Atteindre la frontière ultime. Celle que personne, jamais, ne pourra dépasser. Cette victoire-là, définitive, c'est moi qui l'ai franchie. Mais ils ne veulent pas de moi. Ils ricanent. C'est qu'elle en veut encore la petite mère. À son âge. Une femme sans mari, bien sûr. Veuve d'un pilote de la Première Guerre mort en civil en temps de paix. Mère d'un marin militaire mort du typhus en Afrique du Nord. C'est elle qui prend les risques, ce sont les autres qui meurent. Je les entends, tu sais. Toutes mes décorations. Qu'est-ce que j'en fais maintenant ?

Elle n'aurait pas dû prononcer ces paroles, ce discours désenchanté qui ne lui ressemble pas. Il n'est pas digne d'une héroïne. Mais il n'y avait qu'Adrienne pour entendre, pour comprendre. Adrienne comprend tout. Le monde est si différent de ce qu'il était. Que va-t-elle pouvoir accomplir sur ce champ de ruines, ce cimetière géant ?

Démobilisée. Fracturée. Épuisée.

Libre et anéantie. Pour la première fois de sa vie, elle n'a rien à faire, pas de projets, pas de défis à relever, pas d'avenir.

- Vous vous êtes fait ça comment ? avait demandé le médecin.

- Je suis tombée et me suis fracturé le coude. Depuis, j'ai cette raideur dans le bras. Elle va me gêner pour piloter. Alors je me suis dit...peut-être vaudrait-il mieux que je me fasse opérer.

- Vous ne pouvez plus piloter.

Il remplit des papiers, pendant qu'elle digère la nouvelle. Plus jamais ? Elle ne pose pas la question à voix haute, la réponse serait insupportable. Plus jamais aux commandes d'un avion. Elle. Après trois mille heures de vol et dix records du monde, après les trente-huit heures, après l'Atlantique, après le Harmon Trophy, la Légion d'Honneur, les dizaines de médailles, de prix, de trophées. Plus jamais aux commandes d'un avion. Pour ça. Pour si peu. Une chute sur un quai cinq ans plus tôt. Le Bourget-Drancy. Les soldats français qui partent, avec leurs yeux qui leur mangent la peau, les morceaux de papier, les lettres hâtives, les appels et les cris. (...) La douleur surgit lorsque l'air est humide ou le matin, si elle a dormi dans une mauvaise position. (...)

Dans la salle d'attente du médecin, traînait sur la table basse ce magazine dont on lui avait parlé, mais qu'elle n'avait pas eu la curiosité d'acheter. Les femmes les plus célèbres. Sur plusieurs pages, on en découvre la liste et leurs photos. C'est elle qui arrive en tête devant la générale de l'Armée du salut Evangeline Booth, l'écrivain Colette, Greta Garbo, Irène Joliot-Curie, la duchesse de Windsor et Eleanor Roosevelt. Cette photographie ... J'ai l'air d'une dame patronnesse.

Est-ce ainsi que les autres me voient ? Ou seulement ce photographe ? Il ignore qui je suis, interprète une apparence, selon son idée du monde. Ce n'est pas moi sur ce cliché. Elle a mis le journal dans son sac. Elle l'enverra à sa mère. Finalement, la renommée est utile. Le ministère décide de la mettre à profit pour tenter de regagner des marchés perdus. On lui propose une mission en Amérique du Sud. Emmener plusieurs avions, pilotés par d'autres, les montrer aux clients potentiels. Elle accepte bien sûr. Elle a si peur qu'on ne lui demande plus rien. Pendant la mission, survient la nouvelle de la mort de Lefebvre, tué avec son mécanicien au cours d'un vol de démonstration. Elle se souvient de ce dîner de Noël 1940. De son rire. De son courage et de celui de sa femme, qui l'avait accompagné en Angleterre en 1942. Perdre les amis est chaque fois plus difficile, le vide grandit, encore un pan de passé qui disparaît, un pan de sa vie, une partie de son être (...) Et cette foule d'hommes et de femmes qu'elle ne reverra plus, foule mouvante, prédatrice aux profondeurs infinies. Maurice Drouhin, Léna Bernstein, Marcel Reine, Henri Guillaumet, Jean Mermoz, Hélène Boucher, Saint Ex et tous les autres, les vieux complices de l'aviation, les compagnons de la guerre, ceux de la Résistance. (...)

Que reste-t-il de nous ? avait murmuré Adrienne lors de leur dernière conversation, ce moment qu'elles avaient voulu remplir de nostalgie et de regrets, du poids des absents, de la peur du vide. Comme un dernier regard derrière soi. Oui, que reste-t-il ?

\*

**Tournez la page S.V.P.**

Un salon garni de dorures, de tapisseries, de bois précieux, un micro, une foule compacte et compassée. Le ministre de l'Air lit le décret qui la promeut au grade de commandeur dans l'Ordre National de la Légion d'honneur pour titres de guerre exceptionnels et faits de résistances :

« BASTIE (Marie-Louise dite Maryse), lieutenant de réserve. Pilote féminin d'un rayonnement international. Blessée en service aérien commandé en 1940, est entrée de suite dans la lutte contre l'ennemi. Agent de renseignements de haute valeur, a milité dès la fin 1940 contre l'effort de guerre de l'occupant. A notamment œuvré dans la région parisienne et normande. Après avoir été arrêtée par l'ennemi, n'en a pas moins poursuivi la lutte dans les rangs du réseau Darius jusqu'à la libération du pays. »  
(...) Un vieil homme l'aborde qu'elle ne reconnaît pas.

- Quel effet cela procure-t-il d'être la première femme à recevoir la cravate du soldat ? Et nous voilà commandeur. Savez-vous que seulement deux Françaises ont obtenu cette distinction avant vous ? Anna de Noailles et Colette, mais c'était à titre civil et non militaire. Il ne reste plus qu'à vous décerner la médaille de la Résistance.

- Oui, c'est prévu, je crois, dit-elle.

Elle hésite puis ajoute :

- Je suis fière d'avoir contribué à préserver mon pays, de voir le retour de la liberté.

- Bien sûr, bien sûr, dit le vieil homme, qui s'éloigne déjà l'air un peu déçu comme s'il attendait une autre réponse. (...)

Du fond de la pièce, derrière la foule des visages, Bart adresse à Maryse un petit signe. Une mimique d'encouragement, de connivence, qui lui en rappelle une autre identique, par le même homme, à Bordeaux, il y a une vie de cela. Près de lui se détachent les traits immobiles de Louis, debout près de son avion, puis la silhouette d'un enfant qui court sur le tarmac. Cet enfant, c'est Germain. Il court dans le soleil en s'éloignant. Louis suit l'enfant du regard puis se tourne vers elle et lui sourit. Elle le revoit enfin tel qu'il était, le mordoré de ses yeux, la finesse de ses traits, le grain de sa peau, elle sent le souffle de sa respiration, l'entend. Elle lève la main vers lui, elle pourrait presque le toucher. Effleurer sa joue, son front, encore une fois. Toucher ses cheveux. Elle voit derrière lui l'azur blanchir, les nuages se diluer dans cette blancheur, disparaître dans l'éclat d'un crépuscule aux senteurs oubliées. Puis le ciel se ternit, sombre dans un gris mat qui enrobe le monde d'un voile opaque. Le sourire de Louis s'efface, elle cherche l'enfant mais il a disparu lui aussi. Des médailles et des fleurs. Des souvenirs et des morts. Des traces dans le ciel. Ce qu'il reste de nous. **1390 mots**